Probabilités non commutatives et algèbres de von Neumann de groupes

Rennes, août 2008

Valeurs propres de matrices hermitiennes: problème de Weyl

Soient A et B deux matrices hermitiennes de taille n et de spectres respectifs

$$\sigma(A) = \{\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n\}$$

$$\sigma(B) = \{\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n\}$$

Que peut-on dire du spectre

$$\sigma(A+B) = \{\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$$

de la somme $A+B$?

Valeurs propres de matrices hermitiennes

Une suite réels $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ apparait comme le spectre de $A+B$ pour deux matrices hermitiennes A, B avec

$\sigma(A) = \{\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n\}, \ \sigma(B) = \{\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n\}$

si et seulement si

- $\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

- pour tout $r = 1, \ldots, n$ et tout triplet de Horn $(I, J, K) \in T_r^n$ (I, J, K sont certaines parties de $\{1, \ldots, n\}$ avec $|I| = |J| = |K| = r$), on a

$\sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \beta_j \geq \sum_{k \in K} \lambda_k$

[Conjecture de Horn (1962), démontrée récemment par Klyatchko, Tataro, Knutson et Tao.]

Matrices aléatoires: théorème de Wigner

On fixe une suite de matrices aléatoires gaussiennes hermitiennes $G_N = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} \in M_N(\mathbb{C})$ avec $N \to \infty$

• $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

• les a_{ij} sont des variables aléatoires gaussiennes, indépendantes, centrées, de variance $1/N$.

On pose

$\varphi(G_N) = \text{Trace} \circ \mathbb{E}(G_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit $\varphi(G_N^k)$ le moment d'ordre k de G_N par rapport à φ :

Soit σ la loi *semi-circulaire* de densité

$\mathbf{1}_{[-2,2]}(t) \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - t^2}$

Théorème[Wigner 1955] G_N tend en loi vers σ quand $n \to \infty$, c-à-d

pour tout $k \in \mathbf{N}$, on $\lim_N \varphi(G_N^k) = m_k$, où m_k est le moment d'ordre k de σ

[$m_k = 0$ pour k impair et $m_{2k} = C_k = \frac{1}{k} C_{2k}^{k-1}$ est le nombre de Catalan]

Matrices aléatoires: théorème de Voiculescu

On fixe deux suites indépendantes de matrices aléatoires gaussiennes hermitiennes G_N et H_N dans $M_N(\mathbb{C})$ avec $N \to \infty$

Que peut-on dire de la distribution asymptotique du *couple* (G_N, H_N)

Théorème[Voiculescu 1991] (G_N, H_N) tend en loi vers un couple (G, H) de variables aléatoires (non commutatives) *libres*

Espaces de probabilités non commutatifs

Un espace de probabilités non commutatif est la donnée d'un triplet $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \varphi)$, où:

• $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert;

• $\mathcal{A}$ est une *algèbre de von Neumann* sur $\mathcal{H}$, c-à-d

$A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une sous-algèbre, contenant I, auto-adjointe et fermée pour la topologie forte (si $T_n \in \mathcal{A}$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $T_n\xi \to T\xi$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, alors $T \in \mathcal{A}$)

• φ est un *état* sur $\mathcal{A}$, c-à-d

$\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire normalisée ($\varphi(I) = 1$) et positive ($\varphi(T^*T) \geq 0$ pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

Espaces de probabilités non commutatifs

Soit $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilités non commutatif.

• Les élements $T \in \mathcal{A}$ sont appelés *variables aléatoires*

• Les *moments* de T (par rapport à φ) sont les nombres

$$\varphi(T^k) \text{ pour } k \in \mathbb{N}$$

[Si T est auto-adjoint (ou normal), φ définit une mesure de probabilité μ_T sur $\mathbb{R}$ qui est appelée la *loi* de T et les $\varphi(T^k)$ sont les moments de cette mesure]

• Les moments mixtes d'une famille $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{A}$ sont les nombres

$$\varphi(T_{i(1)} \ldots T_{i(k)})$$

pour $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq i(1), i(2), \ldots, i(k) \leq n$

L'ensemble de ces moments forment la distribution conjointe de la famille $T_1, \ldots, T_n$

Espaces de probabilités non commutatifs: exemples

• Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité

et $\mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$, considerée comme algèbre d'operateurs de multiplication sur $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{P})$.

Soit $\varphi(X) = \mathbb{E}(X)$ pour $X \in \mathcal{A}$.

• Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Soit $\xi \in \mathcal{H}$ un vecteur fixé de norme 1. On pose $\varphi(T) = \langle T\xi | \xi \rangle$ pour $T \in \mathcal{A}$.

• **[Matrices aléatoires]** Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $N \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{A} = \mathcal{M}_N(L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$, considerée comme algèbre d'operateurs de multiplication sur $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{C}^N)$. Soit

$$\varphi\Big((X_{ij})_{1 \le i,j \le N})\Big) = \text{Trace} \circ \mathbb{E}(X)$$

pour $X = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathcal{A}$

• Soit Γ un groupe dénombrable. Soit $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, soit $U_\gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ défini par

$$U_\gamma \xi(x) = \xi(\gamma^{-1}x), \qquad \xi \in \ell^2(\Gamma), x \in \Gamma.$$

Soit $L(\Gamma)$ l'adhérence dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de l'espace vectoriel engendré par $\{U_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ pour la topologie forte.

On pose $\varphi(T) = \langle T\delta_e | \delta_e \rangle$ pour $T \in L(\Gamma)$.

$L(\Gamma)$ est appelée l'algèbre de von Neumann du groupe Γ.

Variables aléatoires libres

Soit $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilités non commutatif.

Deux variables aléatoires $S, T \in \mathcal{A}$ avec $S = S^*$ et $T = T^*$ sont dites *libres* si:

pour tous polynômes

$p_1(S), p_2(S), \ldots$ et $q_1(T), q_2(T), \ldots$

tels que

$\varphi(p_i(S)) = 0$ et $\varphi(q_i(T)) = 0$, on a

$$\varphi(p_1(S)q_1(T)p_2(S)q_2(T)\ldots) = 0$$

$$\varphi(q_1(T)p_1(S)q_2(T)p_2(S)\ldots) = 0$$

Variables aléatoires libres: quelques calculs

Soit $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilités non commutatif. et variables aléatoires $S, T \in \mathcal{A}$ libres.

- On a $\varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T)$

- On a $\varphi(S^m T^n S^p) = \varphi(S^{m+p})\varphi(T^n)$

- On a

$$\varphi(STST) = \varphi(S^2)\varphi(T)^2 + \varphi(S)^2\varphi(T^2) - \varphi(S)^2\varphi(T)^2$$

- supposons que S et T sont centrées ($\varphi(S) = \varphi(T) = 0$) et que $ST = TS$; alors $\varphi(S^2) = 0$ ou $\varphi(T^2) = 0$.

[Conséquence: deux variables aléatoires classiques non constantes ne sont jamais libres!]

Variables aléatoires libres: exemples

• Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$$

l'espace de Fock sur $\mathcal{H}$, où $\mathcal{H}^{\otimes 0} \cong \mathbb{C}$ est engendré par un vecteur unitaire Ω.

Soit φ l'etat sur $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ défini par $\varphi(T) = \langle T\Omega|\Omega\rangle$.

Pour tout $f \in \mathcal{H}$, soient $l^*(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ et $l(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ les opérateurs de création et d'annihilation:

$$l^*(f)\Omega = f$$

$$l^*(f)h_1 \otimes \cdots \otimes h_n = f \otimes h_1 \otimes \cdots \otimes h_n$$

$$l(f)\Omega = 0$$

$$l(f)h_1 \otimes \cdots \otimes h_n = \langle f|h_1\rangle h_2 \otimes \cdots \otimes h_n$$

Pour tout vecteur $f \in H$, la loi de l'opérateur auto-adjoint

$$T = l(f_1) + l^*(f_1)$$

est la loi semi-circulaire σ de Wigner.

Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$ unitaires et orthogonaux. Alors les variables aléatoires

$$S_1 = l(f_1) + l^*(f_1) \text{ et } S_2 = l(f_2) + l^*(f_2)$$

sont libres.

• Soit Γ le groupe libre sur deux générateurs a, b. Soit $L(\Gamma)$ son algèbre de von Neumann. Les variables aléatoires $U_a, U_b \in L(\Gamma)$ sont libres.

Convolution libre

Soient μ et ν deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ (à supports compacts). On peut trouver un espace de probabilités non commutatif $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \varphi)$ et deux variables aléatoires $S, T \in \mathcal{A}$ libres. dont les lois sont $\mu_S = \mu$ et $\mu_T = \nu$.

La loi μ_{S+T} de $S+T$ est appelée la *convolution libre* de μ et ν et est notée $\mu \boxplus \nu := \mu_{S+T}$

[Remarque: $\mu \boxplus \nu$ ne dépend que de μ et ν et non du choix de S et T; on définit ainsi une opération associative et commutative sur l'ensemble des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$]

[Exemple: Soit σ_r la loi semi-circulaire de Wigner de paramètre $r > 0$, c-à-d de densité $\mathbf{1}_{[-r,r]}(t)\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - t^2}$; alors

$\sigma_r \boxplus \sigma_s = \sigma_{\sqrt{r^2+s^2}}$]

[Exemple: Soit $\mu = \nu = (\delta_1 + \delta_0)/2$ alors $\mu \boxplus \nu$ est la loi de l'Arcsinus]

Le TCL libre

Théorème[Voiculescu 1991] Soit $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \varphi)$ un espace de probabilités non commutatif. Soit

$$X_1, X_2, X_3, \ldots$$

une suite de variables aléatoires, de même loi, libres, centrées ($\varphi(X_i) = 0$) et de variance 1 ($\varphi(X_i^2) = 0$). Alors $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$ tend en distribution vers la loi semi-circulaire σ de Wigner, c-à-d:

pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_n \varphi\left(\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\right)^k\right) = m_k$$

où m_k est le moment d'ordre k de σ.

[La loi circulaire joue donc pour le TCL libre le même rôle que la loi normale pour le TCL classique]

Outils analytiques: la R-transformée

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Sa transformée de Cauchy est la fonction analytique

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\mu(dt)$$

On a $G_\mu(z) = \sum_k m_k \frac{1}{z^{k+1}}$ pour les moments m_k de μ.

La R-transformée $R_\mu(z)$ de μ est définie par

$$R_\mu(z) = G_\mu(R_\mu(z) + 1/z)$$

Théorème[Voiculescu] Soient μ et ν deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ (à supports compacts). On a

$$R_{\mu \boxplus \nu} = R_\mu + R_\nu$$

Matrices aléatoires et liberté

On fixe deux suites de matrices constantes A_N et B_N dans $M_N(\mathbb{C})$ avec $N \to \infty$ dont les distributions convergent vers des mesures μ et ν.

Soient $U_N \in \mathcal{U}(N)$ une suite de matrices aléatoires unitaires choisies selon la mesure de Haar du groupe unitaire $\mathcal{U}(N)$.

Alors le couple $(A_N, U_N B_N U_N^*)$ est asymptotiquement libre; la distribution asymptotique de la somme $A_N + U_N B_N U_N^*$ est $\mu \boxplus \nu$

[Exemple: Soit $A_N = B_N = D_N$ la matrice diagonale dont les $N/2$ premiers élements sont 1 et les autres 0. Alors

$\mu = \nu = (\delta_1 + \delta_0)/2$

La distribution asymptotique de la somme $A_N + U_N B_N U_N^*$ est donnée par $\mu \boxplus \nu$ qui est la loi de l'Arcsinus.]

Problème des isomorphismes

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit F_n le groupe libre non-abélien sur N générateurs. Soit $L(F_n)$ l'algèbre de von Neumann de F_n

Problème Pour $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 2, n \geq 2$ et $m \neq n$, les algèbres $L(F_m)$ et $L(F_n)$ sont-elles non isomorphes?

Théorème[Dykema-Radulescu, 1999] On a l'alternative suivante:

- soit toutes les algèbres $L(F_n)$ sont isomorphes entre elles;

- soit toutes les algèbres $L(F_n)$ sont mutuellement non-isomorphes.