

# Tests en statistique quantique

Cristina Butucea

<sup>1</sup>Laboratoire Paul Painlevé (UMR CNRS 8524) – Université de Lille 1

Journées MAS de la SMAI, 2008

# Outline

## Mécanique quantique

Principales notions quantiques

Etats

Observables et mesure

## Statistique non paramétrique

Problème de test

Données et TQH

Modèle

## Méthodes et résultats numériques

Estimateurs de la matrice de densité

Test d'adéquation

Résultats numériques

- ▶ Mesurer des systèmes quantiques  $\rightarrow$  variable aléatoire, révélatrice de certains aspects de la fonction d'onde.
- ▶ Nouveau: plusieurs systèmes quantiques peuvent être créés et manipulés en laboratoire.
- ▶ Statistique: vérifier qu'un état quantique a été correctement produit  $\rightarrow$  estimation et tests.
- ▶ Etat quantique + Mesure d'une Observable  $\Rightarrow$  Résultats suivant une certaine loi de probabilité.

- ▶ **Etat quantique**  $\rho$  sur  $\mathcal{H}$ , espace de Hilbert séparable:
  - $\rho = \rho^*$
  - $\rho \geq 0$
  - $\text{Tr}(\rho) = 1$ .
- ▶ **Exemple 1:**  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$  alors  $\rho$  matrice Hermitienne, définie positive, avec valeurs diagonales réelles et valeurs propres dont la somme vaut 1.

-Etat pur:  $\rho$  si il existe  $v \in \mathbb{C}^d$  tel que  $\rho = v^* v$  et  $\|v\|_2 = 1$ ;

-Etat mixte ou mélange statistique:  $\rho = \sum_n p_n v_n^* v_n$ , où  $\|v_n\|_2 = 1$  et  $\{p_n\}_n$  forment un probabilité.

- ▶ **Exemple 2:**  $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ .  $\rho$  opérateur compact sur  $\mathcal{H}$ , lumière monochromatique dans une cavité.

B.o.n. de  $\mathcal{H}$ :  $\{\psi_n, n \geq 1\}$  base de Fock.

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}2^n n!}} H_n(x) \text{ où } H_n \text{ polynôme de Hermite.}$$

Dans ce cas  $\rho = (\rho_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$  s'appelle **matrice de densité**.

Nous allons prendre comme exemples:

-état de Fock à  $n$  photons:  $\rho^n$  tel que  $\rho_{n,n}^n = 1$  et 0 ailleurs, est un projecteur sur  $\psi_n(x)$ .

-état cohérent  $\alpha \in \mathbb{C}$ :  $\rho^{\alpha-coh}$  est un projecteur sur

$$e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \psi_n(x) =: v^\alpha(x).$$

-état de Schrödinger  $\alpha \in \mathbb{C}$ :  $\rho^{\alpha-sch}$  est un projecteur sur  $v^\alpha(x) + v^{-\alpha}(x)$ .

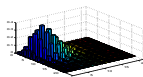
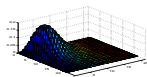


Figure: Etats cohérent et de Schrödinger  $\alpha = 3/\sqrt{2}$

- ▶ **Observables** (ici: champs électrique et magnétique)  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{P}$ : opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$ .
- ▶ Si l'observable  $\mathbf{X}$  a un spectre dénombrable (valeurs propres  $x_a$  dans  $\Omega \in \mathbb{R}$ )

$$\mathbf{X} = \sum_{a=1}^{\dim \mathcal{H}} x_a \mathbf{M}_a.$$

- ▶ Une **Mesure**  $\mathbf{M}$  de l'observable  $\mathbf{X}$  fournit des résultats dans  $\Omega = \{x_a, a \in \mathbb{N}\}$  avec une probabilité dépendant de  $\rho$ :

$$P_{\rho}^{\mathbf{X}}(X = x_a) = \text{Tr}(\rho \mathbf{M}_a).$$

- ▶ On a

$$E_{\rho}^{\mathbf{X}}(X) = \sum_{a=1}^{\dim \mathcal{H}} x_a \text{Tr}(\rho \mathbf{M}_a) = \text{Tr}(\rho \mathbf{X}).$$

- ▶ Cas général (spectre continue  $\Omega$ ), théorème spectral:  
 $\mathbf{X} = \int_{\Omega} w d(\mathbf{M}w)$ .
- ▶ On définit sur  $(\Omega, \Sigma)$  une mesure à valeurs sur les opérateurs positifs (POVM)  $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}(O), O \in \Sigma\}$  tq:
  1.  $\mathbf{M}(\Omega) = \mathbf{1}$ ;
  2.  $\mathbf{M}(O)$  est un opérateur positif pour tout  $O \in \Sigma$ ;
  3.  $\mathbf{M}(\bigcup_n O_n) = \sum_n \mathbf{M}(O_n)$ , for all  $\{O_n, n \in \mathbb{N}\}$  ensembles 2 à 2 disjoints.
- ▶ La variable aléatoire résultant aura la loi

$$P_{\rho}^{\mathbf{X}}(X \in O) = \text{Tr}(\rho \cdot \mathbf{M}(O)).$$



► Exemple 1 Champs électrique et magnétique

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\psi(x) &= x \cdot \psi(x), \\ \mathbf{P}\psi(x) &= -i \cdot \frac{\partial}{\partial x} \psi(x).\end{aligned}$$

Si on mesure  $\mathbf{Q}$  par  $M(O) = I_O(x)$ ,  $O \in \Sigma$  pour un état  $\rho^n$  à  $n$  photons, on obtient une v.a.  $Q$  de loi de probabilité

$$P_{\rho^n}(Q \in O) = \int_O |\psi_n(x)|^2 dx.$$

En particulier si  $n = 0$ :  $\psi_0(x)^2 = \pi^{-1/2} e^{-x^2}$ , donc  $Q \sim N(0, 1/2)$ .

- ▶ **Exemple 2**  $\mathbf{N}$ , nombre de photons, admet les fonctions propres  $\psi_n$ :  $\mathbf{N}\psi_n = n \cdot \psi_n$ .  
Si on mesure  $\mathbf{N}$  pour un état cohérent  $\rho^{\alpha-coh}$  on obtient une variable aléatoire  $N$  de loi de Poisson( $|\alpha|^2$ ).
- ▶ **Exemple 3** Tomographie Quantique Homodyne: mesure de quadratures de  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{X}_\phi = \mathbf{Q} \cos(\phi) + \mathbf{P} \sin(\phi).$$

# Statistique non paramétrique

Classe de matrices de densité:

pour  $r \in (0, 2]$ ,  $B, L > 0$ , on considère

$$\mathcal{R}(B, r, L) := \{\rho \text{ matrice de densité} : |\rho_{j,k}| \leq L \exp(-B(j+k)^{r/2})\}.$$

Test d'adéquation à l'état  $\tau$  donné:

$$\begin{cases} H_0 : & \rho = \tau, \\ H_1(\mathcal{C}, \varphi_n) : & \rho \in \mathcal{R}(B, r, L) \text{ tel que } \|\rho - \tau\|_2 \geq \mathcal{C} \cdot \varphi_n, \end{cases}$$

où  $\varphi_n$  est la vitesse de test.

Comme  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{P}$  ne commutent pas, il n'existe pas de POVM pour  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ . Pas de mesure simultanée de  $(Q, P)$  qui serait liée directement au paramètre  $\rho$ .

Pour  $\ell = 1, \dots, n$ ,  $\Phi_\ell \sim U([0, \pi])$  et par TQH on observe (**cas idéal**)  $X_\ell$  de densité conditionnelle à  $\phi$

$$p_\rho(x/\phi) = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} \rho_{jk} e^{i(k-j)\phi} \psi_j(x) \psi_k(x).$$

**Cas réel:** On observe

$$Y_\ell = X_\ell \sqrt{\eta} + \xi_\ell \sqrt{(1-\eta)/2},$$

où  $\xi_\ell$  sont des gaussiennes standard, indépendantes des  $X_\ell$  et  $\eta$  dans  $[0, 1]$  est la proportion de photons détectés, connue.

On dispose de  $(\Phi_\ell, Y_\ell)$ ,  $\ell = 1, \dots, n$  i.i.d. de densité

$$p_\rho^\eta(y, \phi) = \frac{1}{\pi} I_{[0, \pi]}(\phi) p_\rho^\eta(y/\phi),$$

et  $p_\rho^\eta(y/\phi)$  est la convolution de  $\frac{1}{\sqrt{\eta}} p_\rho(\frac{\cdot}{\sqrt{\eta}}/\phi)$  et d'une loi gaussienne centrée de variance  $(1 - \eta)/2$ .

On veut

$$\text{estimer } \|\rho - \tau\|_2^2 = \sum_{j,k} |\rho_{jk} - \tau_{jk}|^2$$

et

$$\text{tester } H_0 : \rho = \tau,$$

pour  $\tau$  donné.

On utilise les estimateurs de  $\rho_{jk}$ :  $\hat{\rho}_{jk}$  et  $\hat{\rho}_{jk}^\eta$ ,  
pour construire une U-statistique d'ordre 2  $T_n$  qui estime  $\|\rho - \tau\|_2^2$   
et le test

$$\Omega_n = I(|T_n| \geq Ct_n^2),$$

où  $C > 0$  et  $t_n$  ne dépendent que de  $B, r, L$  à définir.

Aubry, B., Méziani (2008) Estimation de  $\rho$  et vitesses de convergence en risque  $\mathbb{L}_2$ .

Si  $\eta = 1$

$$\hat{\rho}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n F_{jk}(X_{\ell}, \Phi_{\ell}),$$

où  $F_{jk}(x, \phi) = f_{jk}(x) e^{i(k-j)\phi}$  et

$$\tilde{f}_{j,k}(t) = \pi(-i)^{j-k} \sqrt{\frac{2^{k-j} k!}{j!}} |t| t^{j-k} e^{-\frac{t^2}{4}} L_k^{j-k}\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

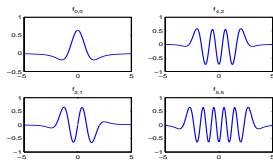


Figure: Exemples de fonctions  $f_{jk}$



Si  $\eta < 1$ , on définit

$$\hat{\rho}_{jk}^{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n F_{jk}^{\eta} \left( \frac{Y_{\ell}}{\sqrt{\eta}}, \Phi_{\ell} \right),$$

où  $F_{jk}^{\eta}(y, \phi) = f_{jk}^{\eta}(x) e^{i(k-j)\phi}$  et

$$\tilde{f}_{j,k}^{\eta}(t) = \begin{cases} \tilde{f}_{j,k}(t) \exp\left(\frac{1-\eta}{4\eta} t^2\right), & \text{si } \eta > 1/2, \\ \tilde{f}_{j,k}(t) \exp\left(\frac{1-\eta}{4\eta} t^2\right) I(|t| < \Delta) & \text{si } \eta \leq 1/2. \end{cases}$$

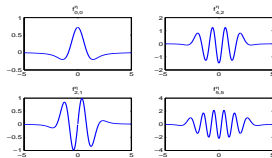


Figure: Exemples de fonctions  $f_{jk}^\eta$ ,  $\eta = 0.9$

Méziani (2008) Statistique de test

$$T_n := \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j,k=0}^{N-1} \sum_{\ell \neq m=1}^n \left[ F_{j,k}^\eta \left( \frac{Y_\ell}{\sqrt{\eta}}, \Phi_\ell \right) - \tau_{j,k} \right] \\ \times \left[ F_{j,k}^\eta \left( \frac{Y_m}{\sqrt{\eta}}, \Phi_m \right) - \tau_{j,k} \right]^*,$$

Exemple  $r = 2$ : Si  $\eta = 1$

$$N = \frac{\log(n)}{4B} + \frac{(\log \log(n))^2}{4B}, \quad t_n^2 = \varphi_n^2 = \frac{(\log(n))^{17/(6r)}}{\sqrt{n}}.$$

Si  $\frac{1}{2} < \eta < 1$

$$N = \frac{\log(n)}{4B + 4(1 - \eta)/\eta} + \frac{2 \log \log(n)}{3B + 3(1 - \eta)/\eta}$$

et

$$t_n^2 = \varphi_n^2 = (\log(n))^A n^{-\frac{B}{2B+2(1-\eta)/\eta}},$$

où  $A(B, \eta)$ .

$n = 10000$ ,  $ne = 1000$

Table: MSE pour  $\tau$  0-photons

$\rho$	<i>0-photons</i>	<i>1-photon</i>	<i>Schrödinger</i>
$N = 15, \eta = 1$	$2.3988 \cdot 10^{-5}$	$1.3175 \cdot 10^{-4}$	$4.7877 \cdot 10^{-4}$
$N = 14, \eta = 0.9$	0.0181	0.0056	0.0071
$N = 13, \eta = 0.9$	0.0069	0.0025	0.0051

Table: MSE pour  $\tau$  cohérent-3

$\rho$	<i>cohérent-3</i>	<i>cohérent-<math>\sqrt{6}</math></i>	<i>Schrödinger</i>
$N = 15, \eta = 1$	$1.4303 \cdot 10^{-6}$	$1.9473 \cdot 10^{-4}$	0.0110
$N = 14, \eta = 0.9$	0.0044	0.0132	0.0531
$N = 13, \eta = 0.9$	0.0019	0.0093	0.0484

Tests de puissance 1: pour  $\alpha \in \{1\%, 5\%\}$  et pour  $\eta \in \{1, 0.9\}$ .