Processus de Dawson-Watanabe et diffusion de Feller multitypes conditionnés à la non-extinction

Nicolas Champagnat et Sylvie Roelly (Univ. Potsdam)

INRIA Sophia Antipolis

Journées MAS 2008, Rennes, 28/08/2008

Processus de branchement conditionnés à la non-extinction

- Les processus de branchement interviennent dans de nombreux domaines d'application.
- Dynamique des populations : servent à modéliser des (sous)-population avec faible interaction interne (populations de faible taille en croissance ou décroissance, invasions, extinctions, balayage sélectifs,...).
- Dans ce contexte, le conditionnement à la non-extinction permet d'avoir des informations sur l'état d'une population en décroissance avant son extinction (distribution quasi-stationnaire, Q-processus,...)
- Dans cet exposé : théorèmes limites dans des cas multitypes à espace d'état continu (processus de Dawson-Watanabe et diffusion de Feller multitypes)

Repères bibliographiques

Cas monotype

- Processus de Galton-Watson : Lamperti et Ney (1968), Kawasu et Watanabe (1971)
- Processus de Dawson-Watanabe et/ou processus de branchement à espace d'état continu : Roelly et Rouault (1989), Evans et Perkins (1990), Evans (1993), Etheridge et Williams (2004), Lambert (2007)

Cas multitype : quelques résultats dans le cas discret

- Cas irréductible : Ogura (1975)
- Cas décomposables (ou réductibles) : Foster et Ney (1975, 1979), Zubkov (1982), Vatutin et Sagitov (1988)

Processus de Dawson-Watanabe multitype

- Espace (physique) : $\mathbb{R}$ (pour simplifier)
- Un processus de Dawson-Watanabe multitype (DWM) X avec matrice de mutation $D = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ est un processus de Markov continu à valeurs mesures dans $M(\mathbb{R})^k$ dont la loi $\mathbb{P}$ a pour transitions de transformée de Laplace

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)_+, \quad \mathbb{E}(\exp -\langle X_t, f\rangle \mid X_0 = m) = \exp -\langle m, U_t f\rangle$$

où $U_t f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)_+$, le semi-groupe cumulant, est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(U_t f)}{\partial t} & = \Delta U_t f + D U_t f - \dfrac{c}{2}(U_t f)^{\odot 2} \\ U_0 f & = f. \end{cases}$$

où $u \odot v = (u_i v_i)_{1\leq i\leq k}$ et $u^{\odot 2} = u \odot u$.

- On a $d_{ij} \geq 0$ si $i \neq j$. Soit μ la valeur propre de D avec la plus grande partie réelle. Le processus est sur-critique (resp. critique, sous-critique) si $\mu > 0$ (resp. $\mu = 0$, $\mu < 0$). Pour nous : critique ou sous-critique (le processus s'éteint p.s. en temps fini).

Quelques remarques

- Le processus de DWM est la limite (diffusive) de $(\frac{1}{K}N^K)_K$, où N^K est la somme de masses de Dirac centrées en les positions d'un système de particules browniennes multitypes branchantes avec les transisitions :
  à taux K, chaque particule se divise ou meurt de telle sorte que le nombre de particules de type j nées d'une particule de type i a pour moyenne $\delta_{ij} + d_{ij}/K$ et pour second moment factoriel c.
- On a choisi c indépendant de i pour simplifier
- La masse du DWM est une diffusion de Feller multitype $(Y^1, \dots, Y^k)$, où pour tout i, $Y_t^i = \langle X_t^i, \mathbf{1} \rangle$ est solution de l'EDS

$$dY_t^i = \sum_{j=1}^{k} d_{ji}\, Y_t^j\, dt + \sqrt{c\, Y_t^i}\, dW_t^i.$$

- Ces processus satisfont la propriété de branchement

Problème

- Lorsque l'on s'intéresse au conditionnement d'un processus de branchement à la non-extinction, plusieurs approches sont possibles :
  - étudier la loi à l'instant t conditionnellement à la non-extinction au même instant lorsque $t \to +\infty$ (limite de Yaglom ou distribution quasi-stationnaire)
  - étudier la loi du processus sur $[0, t]$ conditionnellement à la non extinction à l'instant $t + \theta$ lorsque $\theta \to +\infty$ (Q-processus)
- C'est la seconde approche que nous allons considérer.

Processus de DWM (sous-)critique irréductible conditionné à ne jamais s'éteindre comme une h-transformée

Theorem

Supposons que la matrice D est irréductible. Soit $\mathbb{P}$ la loi d'un processus de DWM critique ou sous-critique issu de $m \in M(\mathbb{R})^k$. Alors, la limite suivante existe

$$\forall B \in \mathcal{F}_t, \quad \mathbb{P}^*(B) := \lim_{\theta \to \infty} \mathbb{P}(B \mid \langle X_{t+\theta}, \mathbf{1} \rangle > 0)$$

et définit une mesure de probabilités sur $\vee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ telle que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}^*\big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\langle X_t, \xi \rangle}{\langle m, \xi \rangle} e^{-\mu t} \quad \mathbb{P}\big|_{\mathcal{F}_t},$$

où ξ est le vecteur propre à droite unitaire de D pour la valeur propre maximale μ.

Rem : On a également $\lim_{\theta \to \infty} \mathbb{P}(B \mid \langle X^i_{t+\theta}, \mathbf{1} \rangle > 0) = \mathbb{P}^*(B)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Idée de la preuve

- Soit x_t la masse de X_t. Sa transformée de Laplace est $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^k,\ \mathbb{E}(e^{-(x_t,\lambda)} \mid x_0 = x) = e^{-(x,u_t^\lambda)}$ où

$$\begin{cases} \dfrac{du_t^\lambda}{dt} & = Du_t^\lambda - \dfrac{c}{2}(u_t^\lambda)^{\odot 2} \\ u_0^\lambda & = \lambda, \end{cases} \tag{1}$$

- On en déduit que

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_B \mid \langle X_{t+\theta}, \mathbf{1}\rangle > 0) = \frac{\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_B\big(1 - e^{-(x_t, \lim_{\lambda\hookrightarrow\infty} u_\theta^\lambda)}\big)\Big)}{1 - e^{-(x, \lim_{\lambda\hookrightarrow\infty} u_{t+\theta}^\lambda)}}.$$

- Une étude soigneuse de la solution du système (1) permet de montrer que

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{\lim_{\lambda\hookrightarrow\infty} u_\theta^\lambda}{(x, \lim_{\lambda\hookrightarrow\infty} u_{t+\theta}^\lambda)} = \frac{e^{-\mu t}\xi}{(x,\xi)}.$$

Deux autres caractérisations du Q-processus (1)

Theorem

$\mathbb{P}^*$ *est caractérisé par sa transformée de Laplace :* $\forall f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)_+$

$$\mathbb{E}^*(\exp -\langle X_t, f\rangle \mid X_0 = m) = \frac{\langle m, V_t f\rangle}{\langle m, \xi\rangle} e^{-\mu t} e^{-\langle m, U_t f\rangle}$$

où

$$\frac{\partial V_t f}{\partial t} = \Delta V_t f + D V_t f - c U_t f \odot V_t f, \quad V_0 f = \xi.$$

Le terme $\frac{\langle m, V_t f\rangle}{\langle m, \xi\rangle} e^{-\mu t}$ peut s'interpréter comme un terme d'immigration, également rendu explicite dans le résultat suivant.

Deux autres caractérisations du Q-processus (2)

Theorem

$\mathbb{P}^*$ est l'unique solution du problème de martingale suivant : pour tout $f \in C_b^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)_+$,

$$\exp(-\langle X_t, f\rangle) - \exp(-\langle m, f\rangle) + \int_0^t \left(\langle X_s, (\Delta + D)f\rangle + c\frac{\langle X_s, f \odot \xi\rangle}{\langle X_s, \xi\rangle} - \frac{c}{2}\langle X_s, f^{\odot 2}\rangle\right) \exp(-\langle X_s, f\rangle)\, ds$$

est une $\mathbb{P}^*$-martingale locale.

Le terme $c\frac{\langle X_s, f\odot\xi\rangle}{\langle X_s,\xi\rangle}$ correspond à une immigration interactive.

Limite en temps grand : cas monomotype

Supposons que $k = 1$ (cas monotype). Dans ce cas, tous les calculs sont explicites. On obtient

Proposition

- *Dans le cas critique* ($\mu = 0$), *le processus* x_t *explose en* $\mathbb{P}^*$*-probabilité quand* $t \to \infty$ *: pour tout* $M > 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}^*(x_t \leq M) = 0.$$

- *Dans le cas sous-critique* ($\mu < 0$),

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}^*(x_t \in \cdot) \overset{(d)}{=} \Gamma(2, \frac{2|\mu|}{c}).$$

De plus,

$$\lim_{\theta \to \infty} \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(x_t \in \cdot \mid x_{t+\theta} > 0) \overset{(d)}{=} \lim_{t \to \infty} \lim_{\theta \to \infty} \mathbb{P}(x_t \in \cdot \mid x_{t+\theta} > 0)$$

Limite en temps grand : cas multitype

Le résultat précédent se généralise dans le cas multitype irréductible.

Theorem

Supposons que D est irréductible.

- *Dans le cas critique ($\mu = 0$), x_t explose en $\mathbb{P}^*$-probabilité quand $t \to \infty$: pour tout $M > 0$ et $i \in \{1, \dots, k\}$,*

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}^*(x_t^i \leq M) = 0.$$

- *Dans le cas sous-critique ($\mu < 0$), x_t converge en loi sous $\mathbb{P}^*$ quand $t \to +\infty$ vers une limite non triviale indépendante de la condition initiale x. De plus,*

$$\lim_{\theta \to \infty} \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(x_t \in \cdot \mid (x_{t+\theta}, \mathbf{1}) > 0) \stackrel{(d)}{=} \lim_{t \to \infty} \lim_{\theta \to \infty} \mathbb{P}(x_t \in \cdot \mid (x_{t+\theta}, \mathbf{1}) > 0).$$

Idée de la preuve

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^k$,
$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}^*(\exp -(x_t,\lambda) \mid x_0 = x) = \lim_{t\to\infty} \frac{(x,v_t^\lambda)}{(x,\xi)} e^{-\mu t} e^{-(x,u_t^\lambda)}$ où
$$\frac{dv_t^\lambda}{dt} = Dv_t^\lambda - cu_t^\lambda \odot v_t^\lambda, \quad v_0^\lambda = \xi.$$
- L'étude asymptotique de ce système dynamique permet d'obtenir la convergence
- Pour l'interversion des limites, soit $\tilde{u}_\infty^\lambda := \lim_{t\to+\infty} e^{-\mu t} u_t^\lambda$. Alors,
$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(e^{-(x_t,\lambda)} \mid (x_{t+\theta},1) > 0) = e^{-\mu\theta} \frac{(\tilde{u}_\infty^{\lambda+\lim_{\bar\lambda\to\infty} u_\theta^{\bar\lambda}} - \tilde{u}_\infty^\lambda, \mathbf{1})}{(\tilde{u}_\infty^\infty, \mathbf{1})}.$$
- Lorsque $\theta \to \infty$, intervient la différentielle de $\tilde{u}_\infty^\lambda$ par rapport à λ. Or, celle-ci est liée à la différentielle du flot de u_t^λ, elle-même par l'EDO linéarisée de u_t^λ, qui se trouve être précisément l'EDO satisfaite par v_t^λ.

Un exemple de cas bi-type décomposable

- Considérons le cas
$$D = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$$
avec $0 < \beta < \alpha$. La matrice D est décomposable (ou réductible).
- Les deux types sont sous-critiques, le type 1 est “plus sous-critique” que le type 2 et seules les mutations du type 1 vers le type 2 sont possibles.
- On a $\mu = -\beta$ et $\xi = \frac{1}{2\alpha-\beta}(\alpha; \alpha - \beta)$.

Les différents Q-processus

Theorem

Soit $\mathbb{P}$ la loi du processus de DWM X avec condition initiale $m \neq 0$. On définit pour tout $t > 0$ et $B \in \mathcal{F}_t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*(B) &= \lim_{\theta\to\infty} \mathbb{P}(B \mid \langle X_{t+\theta}, \mathbf{1}\rangle > 0) \\
\hat{\mathbb{P}}^*(B) &= \lim_{\theta\to\infty} \mathbb{P}(B \mid \langle X^1_{t+\theta}, 1\rangle > 0) \quad (si\ m_1 \neq 0) \\
\check{\mathbb{P}}^*(B) &= \lim_{\theta\to\infty} \mathbb{P}(B \mid \langle X^2_{t+\theta}, 1\rangle > 0).
\end{aligned}$$

Alors, ces limites existent et, pour tout $t > 0$,

$$\check{\mathbb{P}}^*\big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{P}^*\big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\langle X_t, \xi\rangle}{\langle m, \xi\rangle} e^{\beta t}\, \mathbb{P}\big|_{\mathcal{F}_t}$$

$$et \quad \hat{\mathbb{P}}^*\big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\langle X^1_t, 1\rangle}{\langle m_1, 1\rangle} e^{\alpha t}\, \mathbb{P}\big|_{\mathcal{F}_t} \quad (si\ m_1 \neq 0).$$

Comportements asymptotiques (1)

Proposition

- *La masse du type 1 converge vers 0 en* $\mathbb{P}^*$*-probabilité quand* $t \to \infty$.
- *Sous* $\mathbb{P}^*$*, la masse du type 2 converge en distribution vers la loi* $\Gamma(2, 2\beta/c)$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}^*(x_t^2 \in \cdot) \stackrel{(d)}{=} \Gamma(2, 2\beta/c).$$

Comportements asymptotiques (2)

Proposition

- *Sous* $\hat{\mathbb{P}}^*$*, la masse du type 1 converge en distribution vers la loi* $\Gamma(2, 2\alpha/c)$
$$\lim_{t\to\infty} \hat{\mathbb{P}}^*(x_t^1 \in \cdot) \overset{(d)}{=} \Gamma(2, 2\alpha/c).$$
- *La masse du type 2* x_t^2 *explose en* $\hat{\mathbb{P}}^*$*-probabilité quand* $t \to \infty$.

Interprétation

- Dans le cas réductible, conditionner à la survie de toute la population ou bien à la survie d'une sous-population seule peut donner des résultats différents
- Conditionnellement à la survie de toute la population, le type le plus faible s'éteint et le type le plus fort se comporte comme dans le cas monotype.
- Conditionnellement à la survie du type le plus faible, le type le plus fort explose et le type le plus faible se comporte comme dans le cas monotype.
- Ces résultats s'étendent selon ces principes à toutes les valeurs de $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ (mais la preuve est plus difficile quand $\alpha < \beta$ car alors $\xi \not> 0$).

Merci pour votre attention !