Equations aux Dérivées Partielles Stochastiques

Session organisée par **Laurent Denis**

La théorie des EDPS connaît actuellement un développement important, faisant intervenir des concepts et résultats nouveaux aussi bien en probabilité qu'en analyse.

Les EDPS servent à modéliser de nombreux phénomènes dans des domaines variés tels que : les phénomènes de propagation d'ondes en milieux aléatoires, la dispersion en milieux poreux, la turbulence, les études de populations en biologie, les modèles de taux en finance etc....

En schématisant, on peut dire qu'une EDPS est constituée de deux termes : une équation aux dérivées partielles (terme déterministe) et un bruit aléatoire. Cette session sera l'occasion de présenter les résultats nouveaux pour différents types d'équations.

Ordre faible pour la discrétisation d'EDP stochastiques

par **Arnaud DEBUSSCHE**

On étudie la discrétisation d'une EDP stochastique de type parabolique écrite sous forme abstraite dans un espace de Hilbert H :

$$\begin{cases} dX = (AX + f(X))dt + \sigma(X)dW, \\ X(0) = x. \end{cases}$$

Dans le cas de l'équation de la chaleur non linéaire, A est le Laplacien sur un ouvert borné et muni de conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann ou périodiques, H est l'espace L^2, f est un terme non linéaire et dW est un terme de bruit de type bruit blanc.

Dans le cas d'une semi discrétisation temporelle, le schéma d'Euler implicite pour cette équation a la forme

$$\begin{cases} X_{k+1} - X_k = \Delta t A X_{k+1} + \Delta t f(X_k) + W((k+1)\Delta t) - W(k\Delta t) \\ X_0 = x. \end{cases}$$

De nombreux travaux ont étudié *l'ordre fort* de ce schéma. Dans le cas classique de l'équation de la chaleur non linéaire en dimension 1 perturbée par un bruit blanc en espace et en temps, ces travaux conduisent à des estimations du type

$$\mathbb{E}(\sup_k |X_k - X(k\Delta t)|_H) \leq c\Delta t^\alpha,$$

pour $\alpha < 1/4$. Cet ordre 1/4 est raisonnable car il correspond à la régularité temporelle de la solution.

Une autre façon de mesurer la précision d'un schéma est d'étudier son *ordre faible*. On dit que le schéma est d'ordre faible β si pour toute fonction φ suffisamment régulière sur H on a

$$|\mathbb{E}(\varphi(X_k)) - \mathbb{E}(\varphi(X(k\Delta t)))| \leq c(\varphi)\Delta t^\beta.$$

Dans de nombreuses applications, on ne s'interesse qu'à l'approximation de telles quantités et c'est donc l'ordre faible qui est important.

Il est connu que dans le cas de la discrétisation d'une équation différentielle stochastique en dimension finie, l'ordre fort du schéma d'Euler est 1/2 alors que l'ordre faible est 1. La preuve de ce résultat repose sur l'équation de Kolmogorov associée à l'équation différentielle stochastique.

L'équation de Kolmogorov associée à une EDP stochastique est un objet assez complexe et la méthode se généralise très mal. Après avoir rappelé les résultats en dimension finie, nous montrerons les difficultés qui surviennent en dimension infinie et montrerons comment les surmonter, entre autre grace au calcul de Malliavin. Dans le cas de l'équation de la chaleur non linéaire en dimension un perturbée par un bruit blanc en espace et en temps, on montre que l'ordre faible est le double de l'ordre fort.

Temps de sortie et persistence des solitons pour des equations de KdV stochastiques

par Anne De Bouard et **Eric Gautier**

L'équation de Korteweg de Vries admet des solutions solitons qui sont des ondes progressives localisées se propageant à vitesse et forme constante. Nous considérons le cas de perturbations aléatoires par un bruit additif de petite amplitude. Il est courant en physique d'approcher la solution, correspondant à une donnée initiale générant iun soliton en l'absence de bruit, par un soliton modulé aléatoirement (les paramètres du soliton fluctuent aléatoirement). A. de Bouard et A Debussche ont montré la validité dune telle approxmation. Nous faisons ici une étude plus approfondie des temps de sortie de voisinages du soliton et d'un soliton et obtenons leur ordre de grandeur en fonction de l'amplitude du bruit. Ceci permet de quantifier le gain d'une approximation de type soliton modulé dans la description de la persistence des solitons.

Équations aux dérivées partielles stochastiques et processus de Lévy

par **Eulalia Nualart**

Dans cet exposé nous traitons deux problèmes différents qui ont la particularité d'étudier des résultats liées à des équations aux dérivées partielles stochastiques et des processus de Lévy.

Dans le premier problème nous considérons d'e.d.p.s. paraboliques et hyperboliques linéaires perturbées par un bruit blanc espace-temps, où l'opérateur spatial est le L^2-générateur d'un processus de Lévy X. Nous montrons que ces équations ont une solution si et seulement si le processus symmétrizé de X possède des temps locaux. Ce resultat donne un argument probabiliste de la non existence de solutions en dimension strictement plus grande que un. De plus, nous montrons que la solution de l'e.d.p.s est Hölder continue dans sa variable spatialle si et seulement si le temps local mentionné l'est.

Dans le deuxième problème nous considérons un système d'equations des ondes lineaire perturbées par un bruit espace-temps de Lévy. Nous étudierons des propriétés geometriques de l'ensemble espace-temps dans lequel la solution du système visite le niveau zéro.

(Ce travail fut réalisé en collaboration avec D. Khoshnevisan et M. Foondun de l'Université de Utah, EUA).

Maximum principle for Quasilinear Stochastic PDE's driven by a space-time white noise

par **Anis Matoussi**

Journées MAS 2008, Rennes

We study the existence and uniqueness of solutions of quasilinear parabolic stochastic PDEs driven by a white noise. Moreover we prove a maximum principle for this solution.

This is a joint work in progress with Laurent Denis.

Session : Equations aux Dérivées Partielles Stochastiques