# Simulations de Monte-Carlo pour un modèle de dynamique forestière

F. Campillo, N. Desassis, V. Rossi

ARC MICR - Projet MERE - INRIA

INRIA

# Plan

# Contexte

- ARC INRIA
- Equipe Forêts naturelles - CIRAD
- Contexte tropical : grande biodiversité
- Exploitation 'résiliente' du bois (Angélique)
- Logiciel SELVA :
  - Modèle individu centré (IBM)
  - Spatialement explicite
  - Regroupe les connaissances disponibles (dispersion, croissance, compétition...)
  - Temps discret
  - Test de scenarii
  - Confrontation avec les données de Paracou

# Objectifs

- Un cadre mathématique pour les IBM
- Processus Markovien en temps continu (Bolker et Pacala, 1997, Dieckmann et Law, 2001, Fournier et Méléard, 2004)
- Ajout de la croissance (en interaction)
- Simulations

# Notations

- Espace d'état des individus

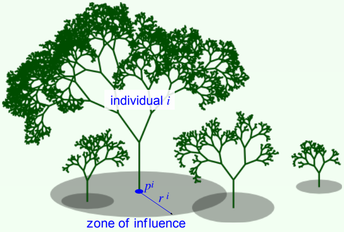
$$\mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \times [r_{\mathsf{Min}}, r_{\mathsf{Max}}[$$

- Un arbre $i$ au temps $t$ :

$$x_t^i = (p_t^i, r_t^i)$$

- Une population

$$\nu_t = \{x_t^i \in \mathcal{X}, i = 1, \ldots, N_t\}$$



# Notations (2)

- L'espace d'état de la population

$$\mathcal{M} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}, n \in \mathbb{N}^\star, x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X} \right\}$$

- Evolution de $(\nu_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathcal{M}$
- Pour $E$ et $F$ dans $\mathcal{M}$ :

$$E + F = E \cup F \text{ and } E - F = E \backslash F$$

# 4 ingrédients de base

Pour un arbre $x = (p, r)$ dans la population $\nu$ :

- 3 horloges d'évènements (indépendantes et exponentielles) :
  - Naissance : taux $\lambda^{\mathsf{b}}(x)$ et noyau de dispersion $D(x, dx')$
  - Mort naturelle : taux $\lambda^{\mathsf{d}}(x)$
  - Mort par compétition : taux $C(x, \nu)$
- Croissance : évolution en temps continu des $r_t^i$

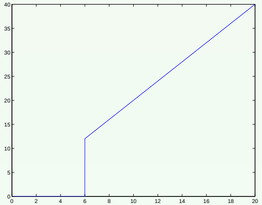
# Naissance

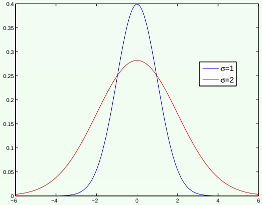
- Modèle de fertilité :

$$\lambda^{\mathsf{b}}(x) = \alpha_{\mathsf{b}} r \mathbb{1}_{\{r \geq \mathsf{r}_{\mathsf{rec}}\}}$$

- $\nu \to \nu + \{y\}$ avec $y \sim D(x, dx')$
- Modèle de dispersion

$$D(x, dx') = N_\sigma(p, dp') \times \delta_{r_{\mathsf{Min}}}(dr')$$

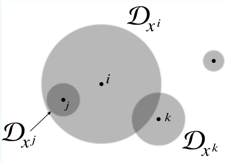




# Mort

- Taux :
  - Mort naturelle : $\lambda^{\mathsf{d}}(x^i) = \alpha_{\mathsf{d}}$
  - Mort par compétition :

$$C(x^i, \nu) = \alpha_{\mathsf{c}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{|\nu|} c(x^i, x^j)$$




avec

$$c(x^i, x^j) = \frac{\mathsf{Aire}(\mathcal{D}_{x^i} \cap \mathcal{D}_{x^j})}{\mathsf{Aire}(\mathcal{D}_{x^i})}$$

- $\nu \to \nu - \{x^i\}$

# Croissance

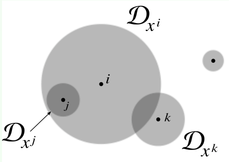
Pour $i = 1, \ldots, N_t$, entre deux évènements, les $r^i$ vérifient :

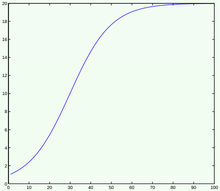
$$\dot{r}_t^i = g(p_t^i, r_t^i, \nu_t)$$

avec

$$g(p, r, \nu) = A(x, \nu) r \left(1 - \frac{r}{r_{\text{Max}}}\right)$$

où $A(x, \nu) \propto 1 - \max(C(x, \nu), 1)$.



# Croissance

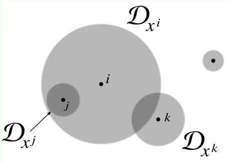
Pour $i = 1, \ldots, N_t$, entre deux évènements, les $r^i$ vérifient :

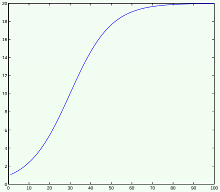
$$\dot{r}_t^i = g(p_t^i, r_t^i, \nu_t)$$

avec

$$g(p, r, \nu) = A(x, \nu) r \left(1 - \frac{r}{r_{\text{Max}}}\right)$$

où $A(x, \nu) \propto 1 - \max(C(x, \nu), 1)$.




- $N_t$ équations différentielles couplées
- Approximation par un schema d'Euler

# Principe de l'algorithme

- $3|\nu_t|$ horloges individuelles
- Taux différents et variables

# Principe de l'algorithme

- $3|\nu_t|$ horloges individuelles
- Taux différents et variables

- Regrouper les $3|\nu_t|$ horloges en une horloge globale
- Utiliser les bornes supérieures des taux individuels (entre deux évènements) :

$$\lambda^{\mathsf{b}}(x) \leq \alpha_{\mathsf{b}} r_{\mathsf{Max}}$$

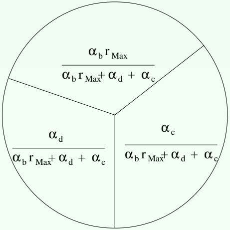
$$C(x^i, \nu) \leq \alpha_{\mathsf{c}} |\nu|$$

- Acceptation-rejet

# Algorithme

Pour $k = 1, 2, \ldots$

- Calculer :
  - $N \leftarrow |\nu_{T_{k-1}}|$
  - $m_1 \leftarrow \alpha_{\mathsf{b}} r_{\mathsf{Max}} N$
  - $m_2 \leftarrow \alpha_{\mathsf{d}} N$
  - $m_3 \leftarrow \alpha_{\mathsf{c}} N^2$
  - $m_0 \leftarrow m_1 + m_2 + m_3$
  - $T_k \leftarrow T_{k-1} + T$ où $T \sim \mathsf{Exp}(m_0)$
- Si nécessaire, mettre à jour les rayons (par schema d'Euler)
- Choisir un arbre uniformément dans la population
- Choisir le type d'évènement selon une multinômiale de paramètres




- naissance : $m_1/m_0$
- mort naturelle : $m_2/m_0$
- mort par compétition : $m_3/m_0$

# Algorithme (2)

- Naissance : le $i^{\text{ème}}$ individu produit une graîne avec probabilité
$$\frac{r^i_{T_{k-1}} \mathbb{1}_{\{r^i_{T_{k-1}} \geq \mathsf{r}_{\mathsf{rec}}\}}}{r_{\mathsf{Max}}}$$
Nouvel arbre : $x' \sim D(x^i_{T_{k-1}}, dx')$
- Mort "naturelle" : supprimer le $i^{\text{ème}}$ individu de la population
- Mort par compétition : supprimer le $i^{\text{ème}}$ individu de la population avec probabilité
$$\frac{C(x^i_{T_{k-1}}, \nu_{T_{k-1}})}{\alpha_c N}$$

# Amélioration de l'algorithme (Fournier et Méléard)

Si l'évènement est une mort par compétition :

- Choisir 2 individus $i$ et $j$ dans la population
- Supprimer l'individu $i$ avec probabilité $c(x^i_{T_{k-1}}, x^j_{T_{k-1}})$

# Amélioration de l'algorithme (Fournier et Méléard)

Si l'évènement est une mort par compétition :

- Choisir 2 individus $i$ et $j$ dans la population
- Supprimer l'individu $i$ avec probabilité $c(x^i_{T_{k-1}}, x^j_{T_{k-1}})$

Taux de rejets toujours très élevé

# Améliorations (2)

- Taux de mort par compétition :

$$m_3 \leftarrow \alpha_{\mathsf{c}} N_{\mathsf{vois}} N$$

où

$$\begin{aligned} N_{\mathsf{vois}} &= \sharp\{\{i,j\}, x^i_{T_{k-1}} \sim x^j_{T_{k-1}}\} \\ &= \sharp\{\{i,j\}, 0 < d(p^i_{T_{k-1}}, p^j_{T_{k-1}}) \leq 2r_{\mathsf{Max}}\}\} \end{aligned}$$

- Choisir 2 individus $i$ et $j$ tels que $d(p^i_{T_{k-1}}, p^j_{T_{k-1}}) \leq 2r_{\mathsf{Max}}$
- Choisir quel individu subit parmi $i$ et $j$ avec probabilité $1/2$
- Le supprimer avec probabilité $c(x^i_{T_{k-1}}, x^j_{T_{k-1}})$ ou $c(x^j_{T_{k-1}}, x^i_{T_{k-1}})$

# Conclusions et perspectives

- Description mathématique du processus (générateur infinitésimal)
- Simulation possible et efficace
- Plusieurs espèces

A faire :

- Jeu de données de Paracou : confrontation modèle/données
- Propriétés du modèle (asymptotiques)