Evaluation de l'efficacité individuelle des maintenances préventives à l'aide d'un modèle de Brown-Proschan

Laurent DOYEN
laurent.doyen@iut2.upmf-grenoble.fr

Laboratoire Jean Kuntzmann (LJK)
Université Pierre Mendès France - IUT2
2 place Doyen-Gosse - 38031 Grenoble CEDEX

Les systèmes industriels critiques sont soumis à :

- **Maintenances Correctives (MC, réparation) :**
  actions ayant lieu après une défaillance et dont le but est de remettre le système dans un état dans lequel il peut à nouveau fonctionner.

- **Maintenances Préventives (MP) :**
  action ayant lieu quand le système est en état de fonctionner et dont le but est de ralentir le processus de dégradation et de réduire la fréquence d'occurence des défaillances.

L'évaluation de l'effet de ces actions de maintenance est d'un grand intérêt en pratique.

Hypothèses basiques sur l'effet des maintenances :

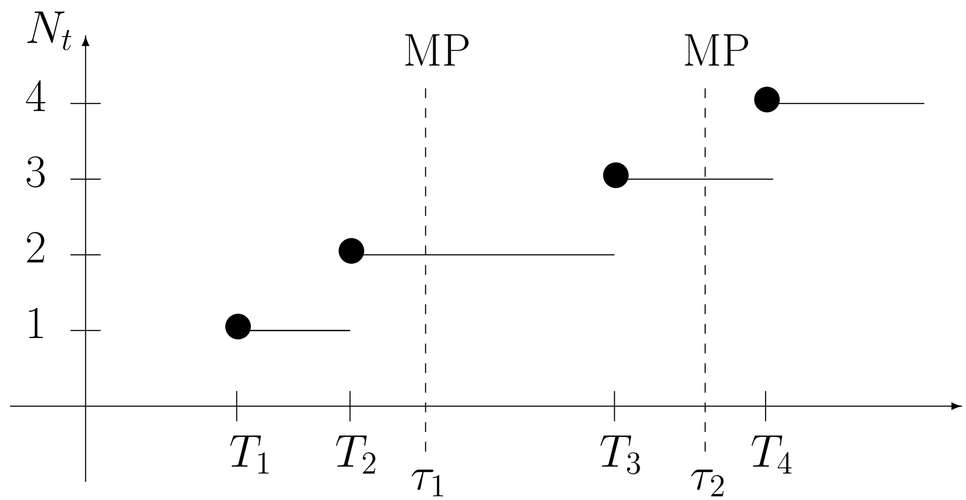
- **Maintenance minimale ou As Bas As Old (ABAO) :** remet le système dans l'état où il était juste avant la maintenance.
- **Maintenance parfaite ou As Good As New (AGAN) :** remet à neuf le système.

La réalité est entre ces deux cas extrêmes :

les effets de maintenances sont imparfaits.

Modèle et Notations

Hypothèse : – Les durées de maintenance ne sont pas prises en compte.



– Instants de défaillance (= MC) : $\{T_i\}_{i\geq 1}$

– Processus de comptage des MC : $\{N_t\}_{t\geq 0}$ processus ponctuel aléatoire.

– **Les MP sont déterministes** : $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$

– Instant de censure en τ_m.

– Avant la première maintenance le taux de défaillance du système est déterministe : $\lambda(t)$, appellé intensité initiale, dépend de paramètres inconnus θ, $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds$.

– MC ABAO

– **MP Brown-Proschan,**

l'effet de la i ème MP est :

– indépendant des autres MP,
– indépendant des instants de défaillance précédents,
– **AGAN avec une probabilité** $p \Rightarrow B_i = 1$,
– **ABAO avec une probabilité** $(1-p) \Rightarrow B_i = 0$.

$$P(B_i = 1 \,|\, B_1, \ldots, B_{i-1}, T_1, \ldots, T_{N_{\tau_i}}) = P(B_i = 1) = p$$

Problème : Evaluation **individuelle** de l'efficacité des MP

– p caractérise l'efficacité **moyenne** des MP : elle peut être estimée par exemple avec l'estimateur de maximum de vraisemblance, $\hat{p}$.

– B_i caractérise l'effet de la $i$ème MP : il est aléatoire et non observé.

– $P_k(\theta, p) = P(B_k = 1 \mid N_{\tau_m} = n, T_1 = t_1, ..., T_{N_{\tau_m}} = t_{N_{\tau_m}})$ caractérise **l'efficacité de la $k$ème MP** : elle peut être estimée par $P_k(\hat{\theta}, \hat{p})$

Evaluation individuelle de l'efficacité des MP

Proposition 1 :

Pour tout $k \in \{1, ..., m\}$, la fonction de vraisemblance associée à l'observation du processus des MC entre 0 et τ_k vérifie :

$$L_{k;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_k}}}(\theta, p) = (1-p)^{k-1} \left(\prod_{i=1}^{N_{\tau_k}} \lambda(t_i) \right) e^{-\Lambda(\tau_k)}$$

$$+p \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{k-1-i} \left(\prod_{j=N_{\tau_i+1}}^{N_{\tau_k}} \lambda(t_j - \tau_i) \right) e^{-\Lambda(\tau_k - \tau_i)} \; L_{i;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_i}}}(\theta, p)$$

avec $L_0(\theta, p) = 0$.

Ainsi,

$$(\hat{\theta}, \hat{p}) = \underset{\theta,p}{\mathrm{argmax}}(L_{m;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_m}}}(\theta, p))$$

$$L_{k;t_1,\dots,t_{N_{\tau_k}}}(\theta,p) =$$

$$\underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\tau_{k-1},\dots,\tau_1 \text{ ABAO}} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{N_{\tau_k}} \lambda(t_i)\right) e^{-\Lambda(\tau_k)}}_{\text{densité des MC sachant } \tau_{k-1},\dots,\tau_1 \text{ ABAO}}$$

$$+ \quad \underbrace{p\sum_{i=1}^{k-1}(1-p)^{k-1-i}}_{\tau_{k-1},\dots,\tau_{i+1} \text{ ABAO, } \tau_i \text{ AGAN}}$$

$$\underbrace{\left(\prod_{j=N_{\tau_i+1}}^{N_{\tau_k}} \lambda(t_j-\tau_i)\right) e^{-\Lambda(\tau_k-\tau_i)}\, L_{i;t_1,\dots,t_{N_{\tau_i}}}(\theta,p)}_{\text{densité des MC sachant } \tau_{k-1},\dots,\tau_{i+1} \text{ ABAO et } \tau_i \text{ AGAN}}$$

$$P_k(\theta, p) = P(B_k = 1 \mid N_{\tau_m} = n, T_1 = t_1, ..., T_{N_{\tau_m}} = t_{N_{\tau_m}})$$

Formule de Bayes : $P_k(\theta, p) = P(B_k = 1) \dfrac{L_{m;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_m}} \mid B_k=1}(\theta, p)}{L_{m;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_m}}}(\theta, p)}$

Proposition 2 : Pour $1 \leq k < m$

$$P_k(\theta, p) = p \, \frac{L_{k;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_k}}}(\theta, p) \; L_{m-k;t_{N_{\tau_k}+1}-\tau_k,\ldots,t_{N_{\tau_m}}-\tau_k}(\theta, p)}{L_{m;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_m}}}(\theta, p)}$$

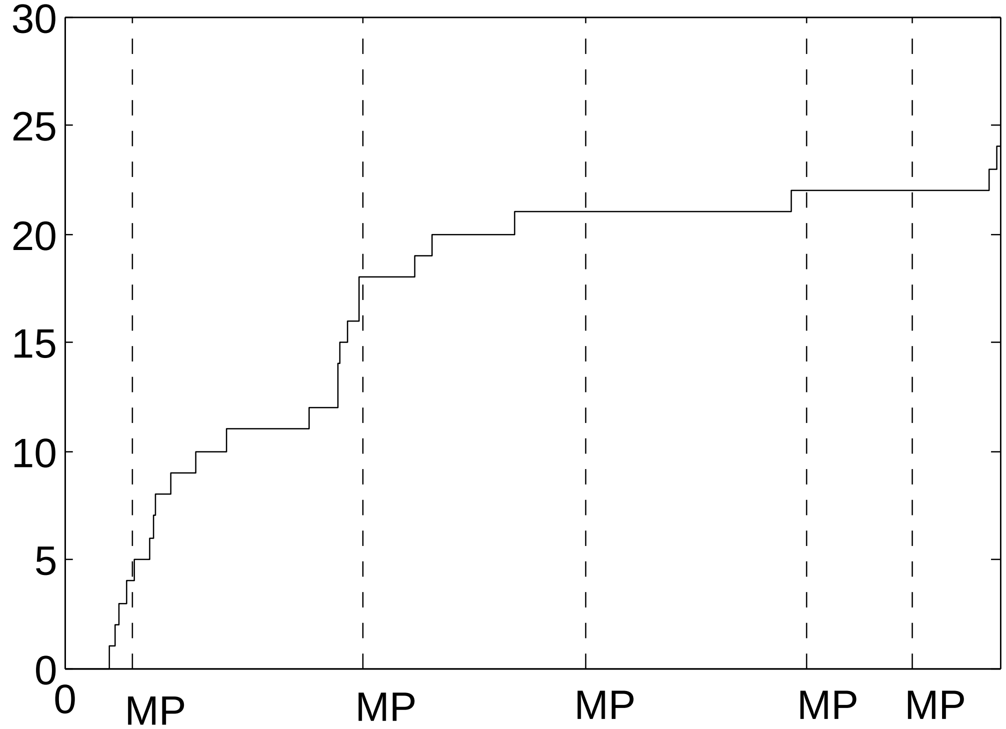
Ainsi, **l'estimateur de l'efficacité de la $k$ème MP est $P_k(\hat{\theta}, \hat{p})$**.

L'efficacité moyenne des MP peut être estimé par la moyenne des $(m-1)$ efficacités de MP :

$$\tilde{p} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} P_i(\hat{\theta}, \hat{p})$$

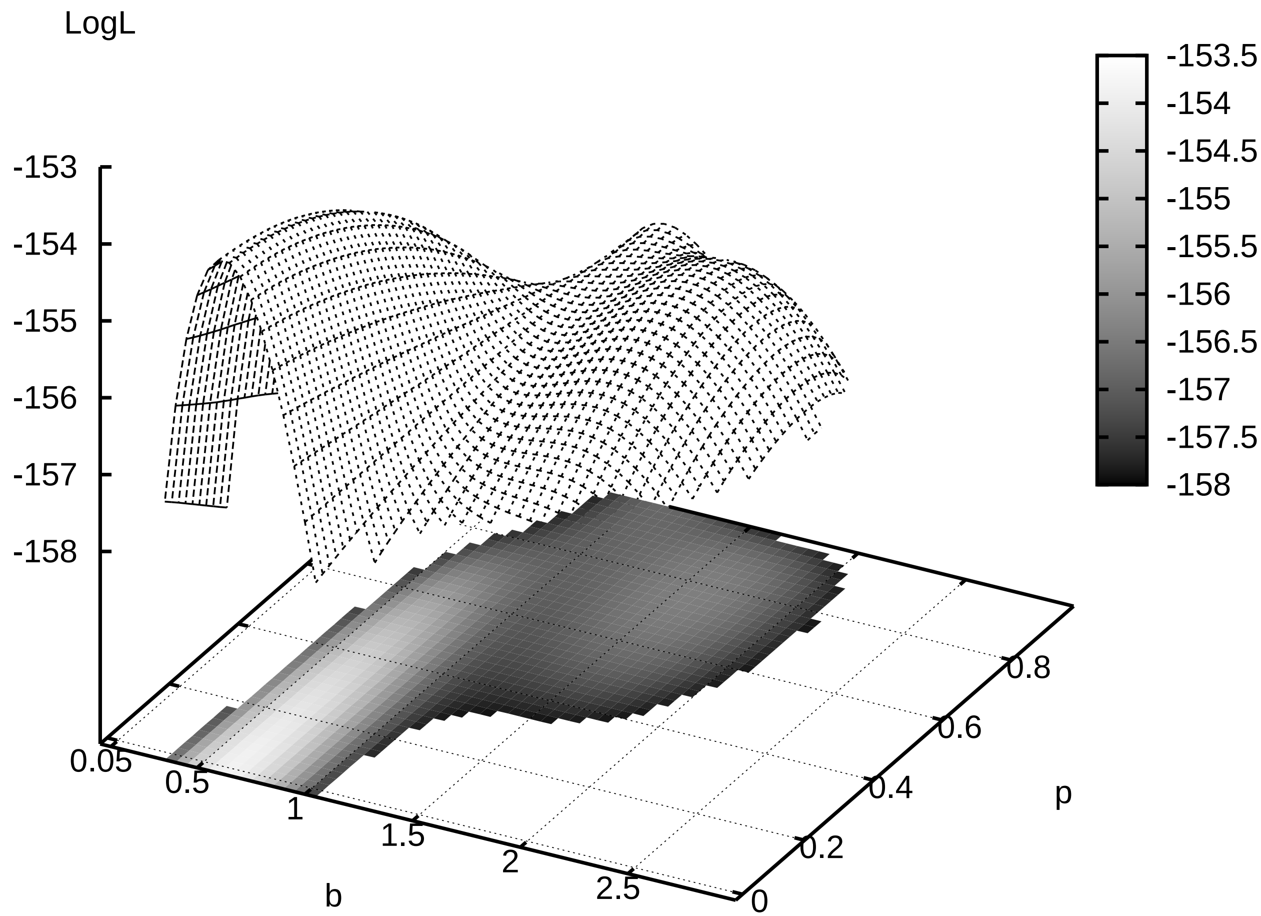
Application à un jeu de données réelles

Données réelles issues d'une unité de production électrique EDF : 24 MC et 5 MP.



Nombre cumullé de défaillances.

Hypothèse : $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$

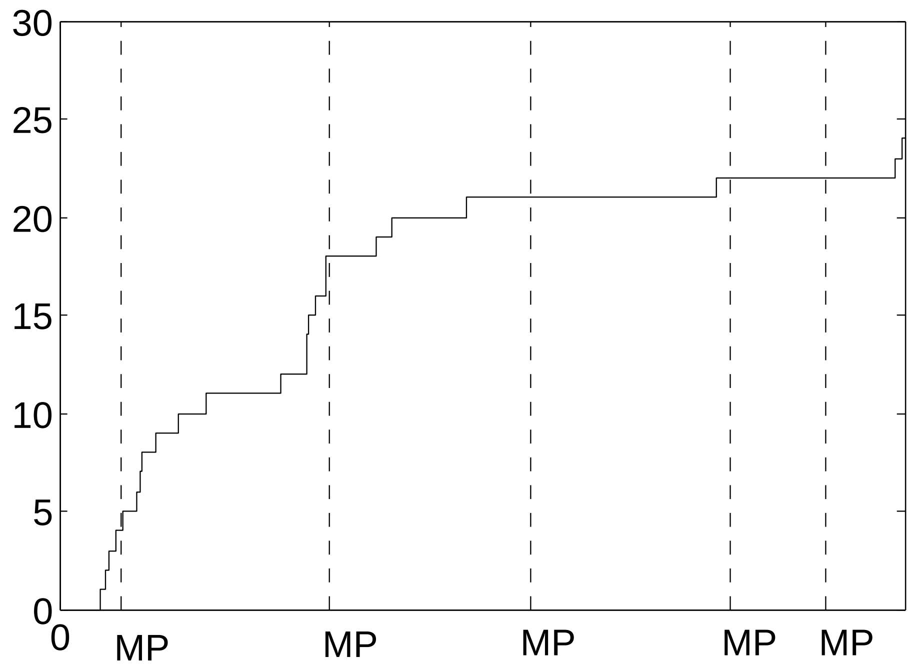


Deux maxima locaux :

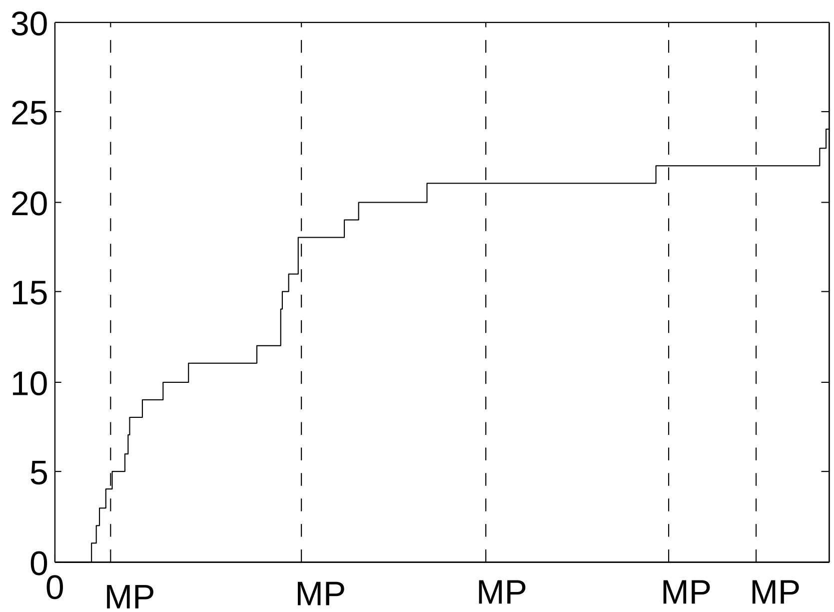
- $\hat{\beta}_1 = 0.62$, $\hat{p}_1 = 0$, log vraisemblance -153.81
- $\hat{\beta}_2 = 1.57$, $\hat{p}_2 = 0.77$, log vraisemblance -156.42.

Pour le maximum global : $\hat{\beta} = 1.57$, $\hat{p} = 0.77$, log vraisemblance -156.42.

i	1	2	3	4	5
$P_i(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p})$	0.02	1.00	1.00	0.99	0.85



$$\tilde{p} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} P_i(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}) = 0.770913 \approx \hat{p}$$



Problème : Le système n'a pas été mis en service à l'instant 0 mais avant :
– les instants de MP avant la date 0 sont connus,
– les instants de MC avant la date 0 ne sont pas connus.

Prendre en compte la censure à gauche du processus des MC.

Notations supplémentaires
– les instants de défaillance sont connus après la date c
– μ nombre de MP programmées avant la date c

Avec censure à gauche du processus des MC

Proposition 3 :

Pour tout $k \in \{1, ..., m-\mu\}$, la fonction de vraisemblance associée à l'observation du processus des MC entre c et $\tau_{\mu+k}$ vérifie :

$$L_{k;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_{\mu+k}}}}(\theta,p) = (1-p)^{\mu+k-1}\left(\prod_{i=1}^{N_{\tau_{\mu+k}}}\lambda(t_i)\right)e^{-(\Lambda(\tau_k)-\Lambda(c))}$$

$$+p\sum_{i=1}^{\mu}(1-p)^{\mu+k-i-1}\left(\prod_{j=1}^{N_{\tau_k}}\lambda(t_j-\tau_i)\right)e^{-(\Lambda(\tau_k-\tau_i)-\Lambda(c-\tau_i))}$$

$$+p\sum_{i=\mu+1}^{\mu+k-1}(1-p)^{\mu+k-1-i}\left(\prod_{j=N_{\tau_i}+1}^{N_{\tau_k}}\lambda(t_j-\tau_i)\right)e^{-\Lambda(\tau_k-\tau_i)}\,L_{i-\mu;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_i}}}(\theta,p)$$

Proposition 4 :

Pour $1 \leq k \leq \mu$

$$P_k(\theta, p) = p \, \frac{L_{m;t_1-\tau_k,\ldots,t_{N_{\tau_m}}-\tau_k}(\theta, p)}{L_{m;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_m}}}(\theta, p)}$$

Pour $\mu < k < m-1$

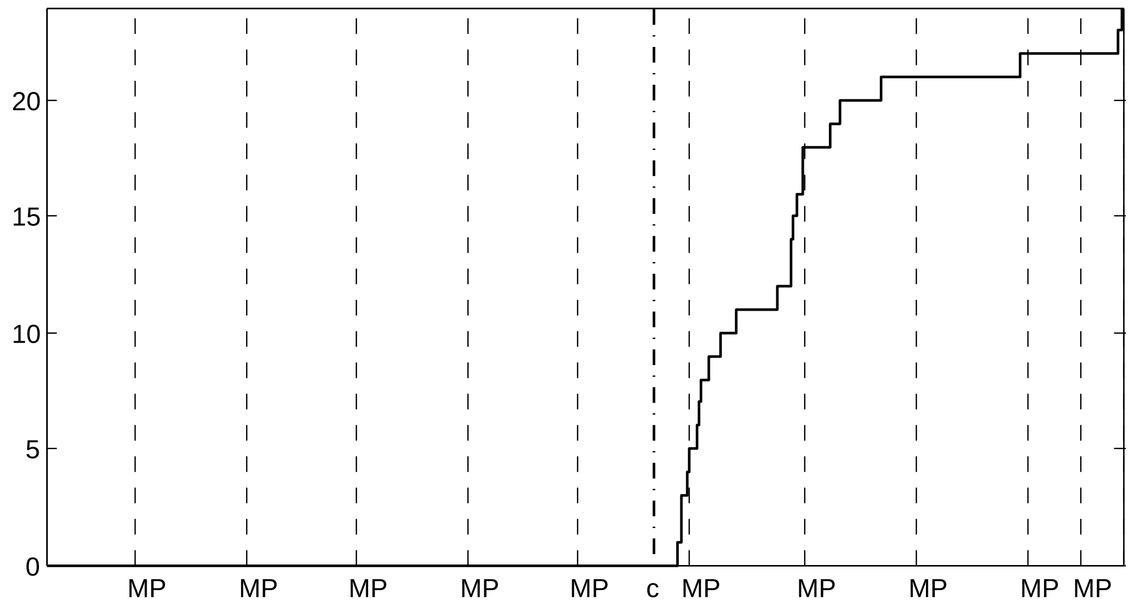
$$P_k(\theta, p) = p \, \frac{L_{k-\mu;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_k}}}(\theta, p) \; L_{m-k-\mu;t_{N_{\tau_k}+1}-\tau_k,\ldots,t_{N_{\tau_m}}-\tau_k}(\theta, p)}{L_{m;t_1,\ldots,t_{N_{\tau_m}}}(\theta, p)}$$

Ainsi, **l'estimateur de l'efficacité de la $k$ème MP est** $P_k(\hat{\theta}, \hat{p})$.

Application au jeu de données réelles

Données réelles issues d'une unité de production éléctrique EDF :

$$24 \text{ MC}, \begin{cases} 5 \text{ MP avant la censure à droite des MC,} \\ 5 \text{ MP après la censure à droite des MC.} \end{cases}$$

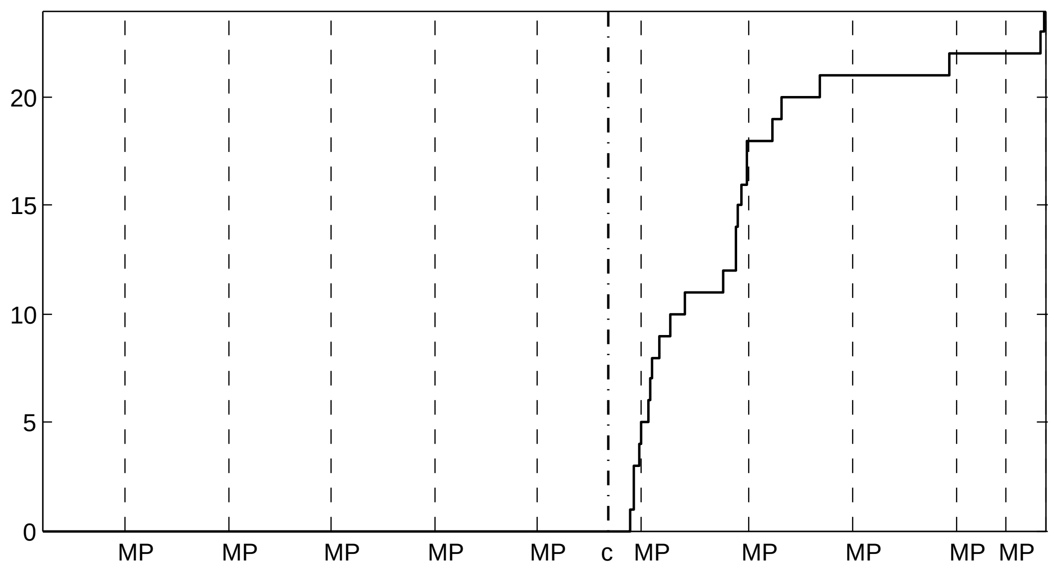


Nombre cumulé de défaillances.

Hypothèse : $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$

$$\hat{\beta} = 1.94,\ \hat{p} = 0.61,\ \text{log vraisemblance } -150.57$$
$$(\text{Sans censure gauche : } \hat{\beta} = 1.57,\ \hat{p} = 0.77,\ \text{log vraisemblance } -156.42)$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_i(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p})$	0.61	0.62	0.69	0.73	0.07	0.00	1.00	0.99	0.96	0.46
Sans censure						0.02	1.00	1.00	0.99	0.85



L'avalanche de défaillances vient du fait que le système est dégradé au début de la collecte des données.

$$\tilde{p} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} P_i(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{p}) = 0.61 \approx \hat{p}$$

Perspectives :

– Résoudre le problème d'initialisation du paramètre d'échel dans la procédure de maximisation de la vraisemblance.

– Intervalles de confiances et pas seulement estimations ponctuelles.