Propriétés statistiques des matrices de Pauli traversant des canaux bruités

N. Guillotin-Plantard
Institut C. Jordan, Université Lyon I

Rennes, Journées M.A.S. 2008

Motivation

Théorie de l'information quantique :

- On s'intéresse à la transmission des systèmes quantiques à 2 états appelés *bits quantiques*.
  Exemple : un atome à deux états (excité ou fondamental).
- Etat = Matrice densité (i.e. une matrice hermitienne positive de trace 1) de la forme :

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

  où $\alpha \in [0,1]$ et $|\beta|^2 \leq \alpha(1-\alpha)$.
- Transformation de l'état quantique : $\rho \Rightarrow \rho' = \Phi(\rho)$ avec

$$\Phi : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$$

  complétement positive et préservant la trace.

Motivation

Théorie de l'information quantique :

- On s'intéresse à la transmission des systèmes quantiques à 2 états appelés *bits quantiques*.
  Exemple : un atome à deux états (excité ou fondamental).
- Etat = Matrice densité (i.e. une matrice hermitienne positive de trace 1) de la forme :

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

  où $\alpha \in [0,1]$ et $|\beta|^2 \leq \alpha(1-\alpha)$.
- Transformation de l'état quantique : $\rho \Rightarrow \rho' = \Phi(\rho)$ avec

$$\Phi : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$$

  complétement positive et préservant la trace.

Motivation

Théorie de l'information quantique :

- On s'intéresse à la transmission des systèmes quantiques à 2 états appelés *bits quantiques*.
  Exemple : un atome à deux états (excité ou fondamental).
- Etat = Matrice densité (i.e. une matrice hermitienne positive de trace 1) de la forme :

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

  où $\alpha \in [0,1]$ et $|\beta|^2 \leq \alpha(1-\alpha)$.
- Transformation de l'état quantique : $\rho \Rightarrow \rho' = \Phi(\rho)$ avec

$$\Phi : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$$

  complétement positive et préservant la trace.

- Observables = matrices auto-adjointes de $M_2(\mathbb{C})$.
Elles forment un ss-e.v. réel de dim. 4 de base $\mathcal{B} = \{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ où

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ **matrices de Pauli**.

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$$

\+ celles obtenues par permutations cycliques de σ_x, σ_y, σ_z.

- **But :** Déterminer les propriétés statistiques des observables de base $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ dans les différents états $\Phi^n(\rho), n \geq 1$.

- Observables = matrices auto-adjointes de $M_2(\mathbb{C})$.
Elles forment un ss-e.v. réel de dim. 4 de base $\mathcal{B} = \{I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ où

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ **matrices de Pauli**.

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$$

+ celles obtenues par permutations cycliques de σ_x, σ_y, σ_z.
- **But :** Déterminer les propriétés statistiques des observables de base $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ dans les différents états $\Phi^n(\rho), n \geq 1$.

Hypothèse (A) sur Φ

Pour tout état ρ,

$$(\mathbf{A}) \qquad \Phi^n(\rho) = \begin{pmatrix} \alpha_\infty & \beta_\infty \\ \overline{\beta}_\infty & 1-\alpha_\infty \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

où $\alpha_\infty \in [0,1]$ et $|\beta_\infty|^2 \leq \alpha_\infty(1-\alpha_\infty)$.

On note v le vecteur (v_1, v_2, v_3) où

$$v_1 = 2\,\mathrm{Re}(\beta_\infty),\ v_2 = -2\,\mathrm{Im}(\beta_\infty),\ v_3 = 2\alpha_\infty - 1.$$

Hypothèse (A) sur Φ

Pour tout état ρ,

$$(\mathbf{A}) \qquad \Phi^n(\rho) = \begin{pmatrix} \alpha_\infty & \beta_\infty \\ \overline{\beta}_\infty & 1-\alpha_\infty \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

où $\alpha_\infty \in [0,1]$ et $|\beta_\infty|^2 \leq \alpha_\infty(1-\alpha_\infty)$.

On note v le vecteur (v_1, v_2, v_3) où

$$v_1 = 2\,\mathrm{Re}(\beta_\infty),\ v_2 = -2\,\mathrm{Im}(\beta_\infty),\ v_3 = 2\alpha_\infty - 1.$$

Considérons l'algèbre

$$\mathcal{M} = \Big(M_2(\mathbb{C})\Big)^{\otimes n}$$

et sur cette algèbre, l'état donné par la matrice densité

$$\omega = \rho \otimes \Phi(\rho) \otimes \Phi^2(\rho) \otimes \ldots \otimes \Phi^k(\rho) \otimes \ldots \otimes \Phi^{n-1}(\rho).$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots n\}$, définissons

$$x_k = I \otimes \ldots \otimes I \otimes (\sigma_x - v_1\, I) \otimes I \otimes \ldots \otimes I$$

$$y_k = I \otimes \ldots \otimes I \otimes (\sigma_y - v_2\, I) \otimes I \otimes \ldots \otimes I$$

$$z_k = I \otimes \ldots \otimes I \otimes (\sigma_z - v_3\, I) \otimes I \otimes \ldots \otimes I$$

où chaque $(\sigma_. - v_.\, I)$ apparait à la k-ième place.

Pour tout $n \geq 1$, posons

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\,,\ Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k\,,\ Z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

et $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$.

A chaque somme, on associe un processus normalisé à temps continu dénoté par

$$X_t^{(n)} = \frac{X_{[nt]}}{\sqrt{n}},\ Y_t^{(n)} = \frac{Y_{[nt]}}{\sqrt{n}},\ Z_t^{(n)} = \frac{Z_{[nt]}}{\sqrt{n}}.$$

Polynômes complétement symétrisés

Pour tout polynôme $P = P(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ à m variables, nous notons $\widehat{P}$ le *polynôme totalement symétrisé* de P obtenu en symétrisant chaque monôme de la manière suivante :

$$X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k} \longrightarrow \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} X_{i_{\sigma(1)}} \ldots X_{i_{\sigma(k)}}$$

où $S_k =$ groupe de permutations de $\{1, \ldots, k\}$.

Exemple : $P(X, Y, Z) = XY^2 + YZ$

$$\widehat{P}(X, Y, Z) = \frac{1}{6}\left[2XY^2 + 2YXY + 2Y^2X\right] + \frac{1}{2}\left[YZ + ZY\right]$$

Un théorème central limite

Théorème [S. Attal, N.G-P, 2008]

Sous l'hypothèse (**A**), pour tout polynôme P à $3m$ variables, pour tout $(t_1, \ldots, t_m)$ tel que $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}_\omega \left[\widehat{P}(X_{t_1}^{(n)}, Y_{t_1}^{(n)}, Z_{t_1}^{(n)}, \ldots, X_{t_m}^{(n)}, Y_{t_m}^{(n)}, Z_{t_m}^{(n)}) \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[P(B_{t_1}^{(1)}, B_{t_1}^{(2)}, B_{t_1}^{(3)}, \ldots, B_{t_m}^{(1)}, B_{t_m}^{(2)}, B_{t_m}^{(3)}) \right]$$

où $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)})_{t \geq 0}$ est le mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^3$, centré et de matrice de covariance Ct, avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 - v_1^2 & -v_1 v_2 & -v_1 v_3 \\ -v_1 v_2 & 1 - v_2^2 & -v_2 v_3 \\ -v_1 v_3 & -v_2 v_3 & 1 - v_3^2 \end{pmatrix}.$$

La représentation de King-Ruskai-Szarek-Werner

Un état de $M_2(\mathbb{C})$ s'écrit aussi

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+z & x-i\,y \\ x+i\,y & 1-z \end{pmatrix}$$

où x, y, z sont des réels t.q. $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.
Toute application CP-PT de $M_2(\mathbb{C})$ peut être représentée, via des changements de bases, par une matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

où t_i, λ_i satisfont certaines inégalités.
Si $|\lambda_i| < 1$ pour $i = 1, 2, 3$, alors

$$v_i = \frac{t_i}{1-\lambda_i}.$$

Exemple 1 : "The depolarizing channel"

- Contraction de la boule unité en une boule de rayon < 1.
- Dans la représentation de King-Ruskai-Szarek-Werner :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{4p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{4p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{4p}{3} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas,

$$v = (0, 0, 0) \text{ et } C = I_3.$$

Exemple 1 : "The depolarizing channel"

- Contraction de la boule unité en une boule de rayon < 1.
- Dans la représentation de King-Ruskai-Szarek-Werner :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{4p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{4p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{4p}{3} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas,

$$v = (0,0,0) \ \text{ et } \ C = I_3.$$

Exemple 2 : "The amplitude-damping channel"

- Dans la représentation de King-Ruskai-Szarek-Werner :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-p} & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}$$

$v = (0, 0, 1)$ et

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 : "The amplitude-damping channel"

- Dans la représentation de King-Ruskai-Szarek-Werner :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-p} & 0 \\ p & 0 & 0 & 1-p \end{pmatrix}$$

$v = (0, 0, 1)$ et

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Principe de grandes déviations

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, nous définissons

$$\bar{x}_k = I \otimes \ldots \otimes I \otimes \sigma_x \otimes I \otimes \ldots \otimes I$$

$$\bar{y}_k = I \otimes \ldots \otimes I \otimes \sigma_y \otimes I \otimes \ldots \otimes I$$

$$\bar{z}_k = I \otimes \ldots \otimes I \otimes \sigma_z \otimes I \otimes \ldots \otimes I$$

où chaque $\sigma_{\cdot}$ apparait à la k-ième place.
Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k, \; \bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{y}_k, \; \bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k$$

Supposons que, pour tout état ρ,

$$(\mathbf{A}') \qquad \Phi^n(\rho) = \begin{pmatrix} \alpha_\infty & \beta_\infty \\ \overline{\beta}_\infty & 1-\alpha_\infty \end{pmatrix} + o(1).$$

Théorème [S. Attal, N.G-P, 2008]

Sous $(\mathbf{A}')$, pour tout $\nu \in \mathbb{R}^{3,\star}$, la suite

$$\langle \nu, (\bar{X}_n, \bar{Y}_n, \bar{Z}_n) \rangle, \quad n \geq 1$$

satisfait un P.G.D. de vitesse n et de bonne fonction de taux

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{x}{||\nu||}\right)\log\left(\frac{||\nu||+x}{||\nu||+\langle \nu, v \rangle}\right) + \left(1-\frac{x}{||\nu||}\right)\log\left(\frac{||\nu||-x}{||\nu||-\langle \nu, v \rangle}\right)\right] & \text{si } |x| < ||\nu||. \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$