Arbres de fragmentation invariants par changement de racine uniforme

Bénédicte Haas, CEREMADE
Université Paris-Dauphine

en collaboration avec J.Pitman et M.Winkel "Spinal partitions and invariance under re-rooting of continuum random trees" arXiv : 0705.3602v1

1. Arbres de fragmentation
2. Invariance par changement de racine uniforme
3. Démonstration

Arbres de fragmentation

Arbre continu :

- espace métrique complet $(\mathcal{T}, d)$ ayant la propriété d'arbre: $\forall v, w \in \mathcal{T}$, $\exists!$ chemin injectif $v \to w$, de longueur $d(v,w)$

- muni d'une mesure de probabilité non-atomique μ ne chargeant que l'ensemble des feuilles $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ et telle que pour tout $v \in \mathcal{T} \backslash \mathcal{L}(\mathcal{T})$, $\mu(\mathcal{T}_v) > 0$, où $\mathcal{T}_v$ désigne le sous-arbre de $\mathcal{T}$ issu de v

racine : ρ

Fonction de hauteur : ht : $v \in \mathcal{T} \to d(\rho, v)$

CRT : arbre continu aléatoire

On dira qu'un CRT $(\mathcal{T},\mu)$ est un arbre de fragmentation si il existe un réel $\alpha < 0$ tel que, $\forall t > 0$:

étant données les masses $m_1, m_2, ...$ des composantes connexes $T_1, T_2, ...$ de $\{v \in \mathcal{T} : \mathrm{ht}(v) > t\}$, les arbres T_i sont indépendants de lois respectives $m_i^{-\alpha}\mathcal{T}$

Le processus $F(t) =$ suite décroissante des μ-masses des composantes connexes de $\{v \in \mathcal{T} : \mathrm{ht}(v) > t\}$ est alors

- un processus de fragmentation auto-similaire d'indice α, i.e. un processus markovien t.q. $\forall t \geq 0$, sachant $F(t) = (s_j)_{j\geq 1}$,,

$$(F(t+s))_{s\geq 0} \overset{\text{loi}}{=} (\{s_j F_i^{(j)}(s_j^{\alpha} t), i, j \geq 1\}^{\downarrow})_{s\geq 0}$$

où les $F^{(j)}$ sont des copies indépendantes de F

- càdlàg, de saut pur

Caractérisation. (Bertoin 01-02) La loi d'un processus de fragmentation F d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$, càdlàg, de saut pur, est caractérisée par 2 paramètres :

- l'indice α
- une mesure ν sur

$$\mathcal{S}^{\downarrow} = \{(s_1, s_2, ...) : s_1 \geq s_2 \geq .... \geq 0, \sum_i s_i \leq 1\}$$

t.q. $\int_{\mathcal{S}^{\downarrow}} (1 - s_1)\nu(\mathrm{ds}) < \infty$ (mesure de dislocation)

Interprétation. Un fragment de masse m se disloque à un taux $m^{\alpha}\nu(\mathrm{ds})$

Ex.: $\nu(\mathrm{ds}) = \delta_{(1/2,1/2,0,...)} \rightarrow$ chaque fragment de masse m se scinde en 2 fragments de masse $m/2$

Lorsque la fragmentation est contruite à partir d'un arbre de fragmentation, $\alpha < 0$ et $\nu(\sum_i s_i < 1) = 0$

Réciproquement,

Proposition (Haas, Miermont 04) tout processus de fragmentation F d'indice $\alpha < 0$, de mesure ν telle que $\nu(\sum_i s_i < 1) = 0$, càdlàg, de saut pur, est associé à un arbre continu aléatoire $(\mathcal{T}, \mu)$

Théorème (Haas, Miermont 04) Soit $(\mathcal{T}, \mu)$ un arbre de fragmentation, alors, p.s.

(i) $\mathcal{T}$ est compact

(ii) si $\int_{\mathcal{S}^\downarrow} s_1^{-1} \mathbf{1}_{\{s_1 \leq 1/2\}} \nu(\mathrm{ds}) < \infty$,

$$\dim_{\text{Hausdorff}}(\mathcal{T}) = 1 \vee (1/|\alpha|)$$

Ex.1. Arbre continu brownien d'Aldous :

▶ fragmentation d'indice $\alpha = -1/2$ et de mesure ν binaire ($\nu(s_1 + s_2 < 1)$=0) t.q.

$$\nu(s_1 \in \mathrm{d}x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}(1-x)^{3/2}}\mathrm{d}x,\ 1/2 \le x < 1$$

(Bertoin 02)

Ex.2. Arbres de Lévy stables, $1 < \beta < 2$ de Duquesne - Le Gall :

▶ fragmentations d'indice $\alpha = 1/\beta - 1$ et mesure ν_β

$$\int_{\mathcal{S}_1^{\downarrow}} f(\mathrm{s})\nu_\beta(\mathrm{ds}) = C_\beta \mathbb{E}\left[Tf(T^{-1}(\Delta_1, \Delta_2, ...))\right],$$

où $(\Delta_1, \Delta_2, ...)$ est la suite décroissante des points d'un PPP sur $\mathbb{R}^+$ d'intensité $x^{-1-1/\beta}\mathrm{d}x$ et $T = \sum_i \Delta_i$

(Miermont 03)

Remarque: arbres de Lévy stables={arbres de Lévy } ∩{arbres de fragmentation}

Invariance par changement de racine uniforme

$(\mathcal{T}, \mu)$: CRT enraciné en ρ

$(L_1, L_2, ...)$: échantillon de feuilles, i.i.d. de loi μ, conditionnellement à $(\mathcal{T}, \mu)$

$\mathcal{T}^{[L_1]}$ arbre $\mathcal{T}$ ré-enraciné en L_1

Définition $(\mathcal{T}, \mu)$ est invariant par changement de racine uniforme, si pour tout $n \geq 2$,

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}^{[L_1]}, \rho, L_2, ..., L_n) \overset{\text{loi}}{=} \mathcal{R}(\mathcal{T}, L_1, L_2, ..., L_n)$$

$\mathcal{R}(\mathcal{T}, L_1, ..., L_n)$: sous-arbre de $\mathcal{T}$ engendré par la racine ρ et les feuilles $L_1, ..., L_n$

Théorème (Aldous 1991, $\beta = 2$; Duquesne, Le Gall 05, $1 < \beta \leq 2$) L'arbre stable d'indice β est invariant par changement de racine uniforme

Théorème (Haas, Pitman, Winkel 07) Un arbre de fragmentation de paramètres (α, ν) est invariant par changement de racine uniforme ssi c'est, à un changement d'échelle près, un arbre stable d'indice β (i.e. si ν est proportionnelle à ν_β et $\alpha = 1/\beta - 1$), pour un $\beta \in (1, 2]$

Démonstration

Idée : décomposition de l'arbre $\mathcal{T}$ le long de la colonne vertébrale : $[[\rho, L_1]]$

$\lambda(t)$ masse de la composante connexe de $\{v \in \mathcal{T} : \mathrm{ht}(v) > t\}$ contenant L_1

Bertoin 01-02 : $-\log(\lambda)$ est un subordinateur changé de temps : $-\log(\lambda) = \xi_{\rho(\cdot)}$, où $\rho(t) = \inf\{u : \int_0^u \exp(\alpha \xi_r) \mathrm{d}r > t\}$

Ex. La mesure de Lévy du subordinateur ξ associé à l'arbre stable d'indice β est de la forme

$$\Lambda(\mathrm{d}x) = c(1 - e^{-x})^{-b-1} e^{-bx} \mathrm{d}x, \qquad (1)$$

avec $b = 1 - 1/\beta \in (0, 1/2]$, $c > 0$

En général, la mesure de Lévy ne caractérise pas ν

1. Caractérisation de la loi de ξ

Lemme (i) La partition ordonnée de $\{2, 3, ..., n\}$ construite en décomposant $\mathcal{R}(\mathcal{T}, L_1, ..., L_n)$ le long de sa colonne vertébrale $[[\rho, L_1]]$ est réversible pour tout n ssi la mesure de Lévy de ξ est de la forme (1) pour un $0 < b < 1$ et un $c > 0$

(ii) Il n'existe pas d'arbre de fragmentation avec une mesure de Lévy de ce type si $b > 1/2$

Preuve : (i) Gnedin Pitman 05

(ii) utiliser $\sum_i s_i = 1$ ν-p.p. $\square$

2. Caractérisation de ν

Lemme Lorsqu'un arbre de fragmentation est invariant par changement de racine uniforme, la mesure de dislocation ν peut se reconstruire à partir de la mesure de Lévy de ξ

Preuve : dans l'arbre à n feuilles $\mathcal{R}(\mathcal{T}, L_1, ..., L_n)$, on regarde l'ensemble des sous-arbres obtenus en effaçant le premier noeud au-dessus de la racine $\rightarrow$ partition (non-ordonnée) aléatoire de $\{1, .., n\}$

$p_n(n_1, n_2, ..., n_k)$: probabilité d'obtenir la partition

$\{1, ..., n_1\}, \{n_1+1, ..., n_1+n_2\}, ..., \{n_1+...+n_{k-1}+1, ..., n\}$

$(\sum_{i=1}^{k} n_i = n)$

Invariance par changement de racine $\Rightarrow$ symétrie :

$$\begin{aligned} & p_n(n_1, n_2, ..., n_k) p_{n_1}(1, n_1 - 1) \\ = \; & p_n(n_2 + ... + n_k + 1, n_1 - 1) p_{n-n_1+1}(1, n_2, ..., n_k) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $p_3(2, 1)$, $p_3(1, 1, 1)$ et les $p_n(1, n-1)$ sont caractérisées par la mesure de Lévy de ξ $\square$

3. Caractérisation de l'indice α : utiliser les longueurs des branches. L'égalité

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}^{[L_1]}, \rho, L_2) \overset{\text{loi}}{=} \mathcal{R}(\mathcal{T}, L_1, L_2)$$

suffit à caractériser α