

FRANCHISSEMENT DE COURBE DE NIVEAU, FORMULES DE RICE ET EXTREMUM

Marie Kratz

ESSEC Business School & MAP5 (Paris Descartes)

Plan

1. Introduction

- ▷ Extrêmes et théorie des franchissements
- ▷ Ensembles aléatoires de niveau
- ▷ Quelles applications?
géométrie stochastique, physique, optique, océanographie
(modélisation de la mer), finance ...

2. Etude des franchissements par un processus Gaussien stationnaire

- ▷ Représentation dans le chaos de Itô-Wiener
- ▷ Comportement asymptotique selon la nature des courbes de niveau

1 Introduction

1.1 Extrêmes et théorie des franchissements

Un problème classique de la théorie des valeurs extrêmes concerne le calcul de la loi (fdr notée F) du supremum $\left(\sup_{t \in T} X_t\right)$ d'un processus stochastique continu X .

Essentiellement trois façons d'aborder ce problème (cf. Azais & Wschebor, 01), via:

- inégalités pour F
- description du comportement asymptotique de F
- étude de la régularité de F .

Franchissements de niveau (upcrossings) et étude du supremum de processus continus sont étroitement liés.

Par exemple, si X désigne un processus unidimensionnel et $U_u(T)$ le nombre de u -upcrossings par X sur $[0, T]$, alors

$$\{U_u(T) = 0\} = \left\{ \sup_{t \in [0, T]} X_t \leq u \right\} \cup \{U_u(T) = 0, X(0) > u\}.$$

Dans le cas Gaussien, la **distribution du maximum** d'un processus satisfaisant certaines conditions de régularité peut s'exprimer sous forme d'une **série de Rice** dont le terme général d'ordre k est donné en fonction du k ème **moment factoriel du nombre de upcrossings** ('Rice method revisited', Azais & Wschebor).

Cas général: cf. e.g. Azais & Wschebor (08 ou 09), Adler and Taylor (07).

1.2 Contexte théorique: ensembles aléatoires de niveau

$X = (X_t; t \in T \subset \mathbb{R}^d)$ processus stochastique défini sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans \mathbb{R}^p .

Quid de la mesure ou des propriétés de l'ensemble de niveau u des trajectoires de X

$$C_u^X := \{t \in T : X_t = u\} ?$$

▷ Si $p > d$, pas d'intérêt: à u fixé, $C_u^X = \emptyset$ p.s.

▷ Si $p < d$, $\dim(C_u^X) = d - p$;

cq: on s'intéresse aux propriétés géométriques de C_u^X (et non au nombre de points de C_u^X)

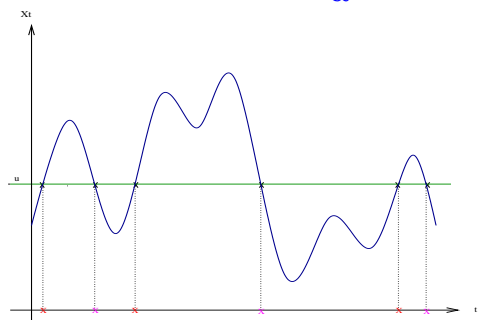
↔ propriétés probabilistes de la mesure géométrique de C_u^X (moments via les formules de Rice)? caractéristique de Euler? ...

Main ref. : Adler & Taylor (07); Azaïs & Wschebor (08 ou 09)

▷ Si $p = d$, loi de la v.a. C_u^X ? problème ouvert ! (sauf situation triviale);
 seul outil à ce jour (pour des trajectoires régulières ou régularisées)
 = formules de Rice qui donnent, à défaut, les expressions des
 moments (factoriels) de cette v.a.

▷ Exemples.

$d = p = 1$: C_u^X = nombre de u -franchissements par X sur $[0, t]$.



X_s a un franchissement du niveau u si

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tq } (X_s - u)(X_{s+\varepsilon} - u) < 0.$$

$d = 2, p = 1$: $C_u^X = \{(s, t) \in [-T, T] \times [-T, T] : X_{s,t} = u\}$;

On s'intéresse à la longueur de C_u^X appelée longueur de courbe du niveau u (cf. K.&L., 01).

1.3 Quelles applications?

Nombreux domaines d'applications: optique, physique, études environnementales (pics de pollution de l'air, réchauffement climatique, ...), fiabilité, teletrafic, épidémiologie, finance ...

Exemples d'études menées basées sur l'étude des ensembles de niveaux (et en particulier du nombre de franchissements):

▷ **en optique et océanographie**; études avec León (00, 08).

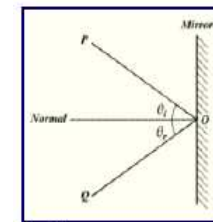
↔ Pb de la modélisation de la mer considérée comme une surface gaussienne: comment obtenir une information statistique sur les amplitudes et fréquences des vagues, en particulier sur les amplitudes extrêmes?

- Une approche possible: via l'étude asymptotique du nombre de maxima locaux (positifs) des vagues, ou de l'**amplitude des vagues** (associées ou non à leur vitesse); cf. Ochi, 98, et K.&L., *Extremes 00* (via les franchissements du niveau constant 0 par \dot{X}).

- Une façon de déterminer la hauteur des vagues de la mer peut être via l'étude de la réflexion et de la réfraction de la lumière sur la mer (cf. Longuet-Higgins (60-62), K.&L., preprint 08).

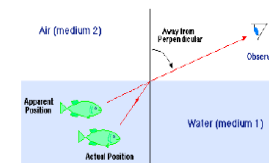
Rappelons que la réflexion de la lumière sur une surface peut être, selon la nature de l'interface, spéculaire (i.e. comme un miroir) ou diffuse (i.e. ne retenant pas l'image mais seulement l'énergie).

Dans le cas de la mer, la réflexion de la lumière est spéculaire.



$\theta_i = \theta_r$
the angle of incidence equals the angle of reflection

Phénomène de réfraction: la direction de la propagation de la lumière est modifiée à la frontière entre l'air et l'eau.





Les points spéculaires sont des images mobiles de la source de lumière reflétée en différents points sur la surface (vagues) de la mer.

Chaque point brillant est une **image spéculaire du soleil sur l'eau** et correspond à un point critique pour la distance soleil-eau-yeux.

Def. (Longuet-Higgins, via des méthodes d'optique géométrique):
les **points spéculaires** d'une surface $W(t, x) =$ franchissements
du niveau (non constant) $\psi(x) = -\kappa x$ par $\partial_x W(t, x)$,

où $\kappa =$ constante fonction de $\begin{cases} d(\text{source de lumière, surface } W(t, x)) \\ d(\text{observateur, surface}) \end{cases}$

\hookrightarrow on aura besoin de l'étude des franchissements d'une courbe de niveau.

▷ en médecine; modélisation de milieux poreux (ostéoporose)
(étude avec Estrade & Iribarren, 07-08).

On choisit un modèle biphasique pour décrire un milieu poreux. On introduit un processus Gaussien X et divise une région d'espace en 2 phases (poreuse et solide) selon que X est plus petit ou plus grand qu'un niveau donné β . Les lois des cordes (intervalles de temps dans une phase donnée, entre deux franchissements successifs) peuvent être alors exprimées via les formules de Rice.

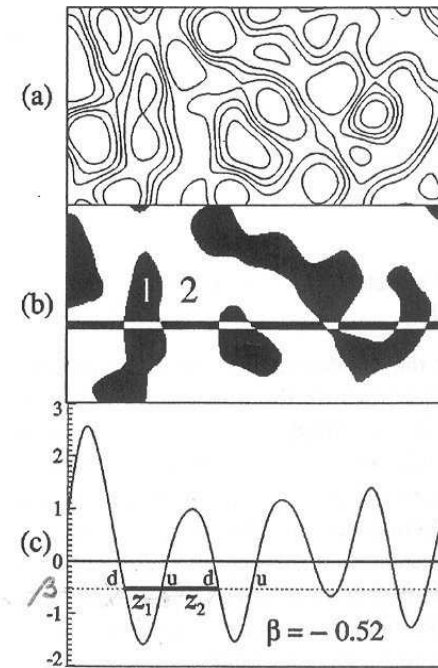


FIG. 1. Generation of a two-phase model (b) by thresholding a Gaussian random field (a). The chord length distribution functions are calculated by counting the number of chords of a given length (b). In one dimension the chord lengths z_1 and z_2 are defined by up and down crossings (shown as u and d , respectively) of a threshold β by a random process (c).

▷ en physique; étude de la fréquence d'oscillateur harmonique (avec León, 08).

Soit l'oscillateur harmonique $X = (X_t)$ défini comme solution stationnaire de l'EDS

$$\ddot{X}_t + \gamma \dot{X}_t + \omega_0^2 X_t = \sigma dW_t, \quad (1.1)$$

avec $\gamma > 0$, ω_0^2 la fréquence naturelle de l'oscillateur, $\sigma^2 =$ la variance du bruit et W b.b. Gaussien standard.

Par le théorème ergodique et la formule de Rice, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t^X(0)}{t} = \frac{\omega_0}{\pi} \quad \text{a.s.};$$

on peut alors en déduire un estimateur p.s. consistant de la fréquence naturelle ω_0 , dont la normalité asymptotique est déduite du TCL du nombre de franchissements:

$$\sqrt{t} \left(\frac{N_t^X(0)}{t} - \frac{1}{\pi} \omega_0 \right) \longrightarrow \mathcal{N}(0, \omega_0^2 \Sigma^2 / \pi^2), \quad \text{quand } t \rightarrow \infty,$$

$$\text{avec } \Sigma^2 = \sum_{q=1}^{\infty} \sigma^2(q) \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2(q) = & \sum_{l_1=0}^{[q/2]} \sum_{l_2=0}^{[q/2]} b_{2(q-l_1)} \tilde{a}_{2l_1} b_{2(q-l_2)} \tilde{a}_{2l_2} \times \int_0^{\infty} \mathbb{E} \left[H_{2(q-l_1)} \left(\frac{X_0}{\sqrt{m_0}} \right) \right. \\ & \left. H_{2l_1} \left(\frac{\dot{X}_0}{\sqrt{m_2}} \right) H_{2(q-l_2)} \left(\frac{X_s}{\sqrt{m_0}} \right) H_{2l_2} \left(\frac{\dot{X}_s}{\sqrt{m_2}} \right) \right] ds. \end{aligned}$$

Rq: ce résultat peut être utilisé pour construire des intervalles de confiance pour ω_0 .

On pourra aussi généraliser ce résultat au cas d'un **oscillateur harmonique linéaire avec fonction de force périodique**, qui lorsque $t \rightarrow \infty$ se comporte comme le processus

$$Y_t = X_t + \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2 \gamma^2}} \cos(\alpha t + \beta),$$

où X_t est la sol stationnaire de l'EDS (1.1) et $\tan \beta = \frac{\alpha \gamma}{\omega_0^2 - \alpha^2}$, les “zero-crossings” de Y correspondant aux franchissements par X de la courbe $2\pi/\alpha$ -périodique définie par

$$\psi(t) = -\frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2 \gamma^2}} \cos(\alpha t + \beta).$$

↪ on aura besoin de l'étude des franchissements d'une courbe de niveau périodique.

2 Etude du nombre de franchissements par un processus Gaussien stationnaire

Résultats? outils/méthodes?

Cas de franchissements de niveau constant: cf. Kratz (06), Probab. Survey 3 (en ligne).

▷ Représentations de Wiener-Itô de telles fonctionnelles (non-linéaires), afin d'en faciliter l'étude asymptotique.

Deux approches possibles:

- les intégrales multiples de Wiener-Itô (**MWI**); Slud, 94.
- les **polynômes d'Hermite**; Kratz & León, 97 (niveau constant), 07 (courbes de niveau).

▷ Comportement asymptotique

- TCL pour $N_t(\mathbb{E}[X])$ sous certaines conditions: Cuzick (76)
- Extension à tout niveau constant x : Piterbarg (78) (méthode par discrétisation)
- TCL, via MWI, pour N_t d'un niveau constant et d'une courbe de niveau périodique: Slud (94)
- Méthode générale, applicable aux processus multidimensionnels, pour obtenir TCL pour toute fonctionnelle de niveau constant de processus gaussiens: K.&L. (01)
- Généralisation au cas d'une courbe de niveau périodique: K.&L. (08)
- Cas d'une courbe de niveau ψ fonction linéaire du temps: on arrive à démontrer que le nombre de ψ -franchissements est une v.a. de L^2 lorsque le temps tend vers l'infini.
Application au nombre de points spéculaires.

Un peu de maths ...

2.1 Representation in the Wiener chaos

Motivation: probabilistic limit theorems for crossings-counts.

W : standard Brownian Motion (or Wiener process).

$\mathbf{H}(\mathbf{X})$: space of real square integrable functionals of the process X ;

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \bigoplus_{\mathbf{q}=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\mathbf{q}}, \quad \text{with } \mathcal{H}_{\mathbf{q}} = \text{Wiener chaos} =$$

closed linear subspace of $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ generated by the random variables $\{H_{\mathbf{q}}(W(h)), h \in L^2(\mathbb{R}, dx), \|h\| = 1\}$, where

$\mathbf{W}(\mathbf{h})$ = stochastic integral of h w.r.t. W ,

$\mathbf{H}_{\mathbf{q}}$ = **Hermite polynomial** of order \mathbf{q} defined by

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}), \quad n \geq 0.$$

Can use as well of the **Multiple Wiener-Itô Integral (MWI)** I_n ,

related to H_n by $H_n(W(h)) = I_n(h^{\otimes n})$, $\forall h \in L^2(\mathbb{R}, dx), \|h\| = 1$.

▷ Hermite polynomial expansion (Slud, 91, 94; Kratz & León, 97)

Hermite polynomials or MWI : very powerful tool to study non linear functionals of Gaussian processes.

↗ Slud (1991, 1994, Ann. Prob.): stochastic calculus to get MWI integral expansions of the number of crossings of the mean level, then of a \mathcal{C}^1 -curve, by a stationary Gaussian process, within $[0, t]$. Approximation of the crossings of X by those of a discrete version of X .

↘ Kratz & León (1997, Stoch. Proc. Appl.; 08, preprint): another method, more direct and simpler than Slud's one for a representation (simpler too) into Hermite polynomials of the crossings number.

Main point: to expand $|\dot{X}_s|$ in Hermite polynomials in \dot{X}_s rather than in X_s , as done by Slud.

The process, then the crossings, are approached by using a process smoothed-by-convolution (for which \exists expansion).

▷ Proposition. (K.&L., 07)

Under the Geman condition and other condition on the curve ψ (to have $\mathbb{E}[N_t^2(\psi)] < \infty$; see K.&L., Ann. Probab.06), the crossings number $N_t^X(\psi)$ of ψ by $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ (centered stationary Gaussian process) has the following expansion in $L^2(\Omega)$:

$$N_t^X(\psi) = \sqrt{\frac{-r''(0)}{r(0)}} \sum_{q=0}^{\infty} \int_0^t \sum_{l=0}^q b_{q-l} \left(\frac{\psi_s}{\sqrt{r(0)}} \right) a_l \left(\frac{\dot{\psi}_s}{\sqrt{-r''(0)}} \right) H_{q-l} \left(\frac{X_s}{\sqrt{r(0)}} \right) H_l \left(\frac{\dot{X}_s}{\sqrt{-r''(0)}} \right) ds.$$

where $b_k(x) := \frac{1}{k! \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} H_k(x)$

and $(a_k, k \geq 0)$: Hermite coefficients of the function $|x|$.

2.2 Asymptotic behavior

2.2.1 A general method

▷ Kratz & León (01): **general method** to obtain C.L.T. for functionals of X , \dot{X} et \ddot{X} , which applies in multidim .

Method = combination of the approach of K.& L. in 97 to get the **Wiener Chaos representation** of $N_t(x)$, and Berman's version of the **m -dependent method**, which relies on an idea of Malevitch (54).

Idea of Malevitch = **to approximate the underlying Gaussian process X** (and its derivatives when they exist) **by an m -dependent process X_m** (i.e. $\mathbb{E}[X_m(s)X_m(t)] = 0$ if $|s - t| > m$), in order to apply the **CLT for m -dependent process** by *Hoeffding & Robbins (48)*.

Sketch of the proof -

Let $\mathcal{F}_t(X)$ be the Hermite expansion of the considered functional of X (and its derivatives).

- L^2 -approximation of $\mathcal{F}_t(X)$ by the corresponding finite sum $\mathcal{F}_{Q,t}(X)$: $\lim_{Q \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} E[\mathcal{F}_t(X) - \mathcal{F}_{Q,t}(X)]^2 = 0$
- approximation of X by a $\frac{1}{\epsilon}$ -dependent process X^ϵ ; X^ϵ obtained directly from the stochastic representation of X by clipping out the portion $(-\infty, -\frac{1}{2\epsilon}[\cup]\frac{1}{2\epsilon}, \infty)$ of the integration domain and by normalizing the resulting integral; as $t \rightarrow \infty$,

$$E[\mathcal{F}_{Q,t}(X) - \mathcal{F}_{Q,t}(X^\epsilon)]^2 \rightarrow 0, \text{ with } \epsilon(t) \rightarrow 0,$$

- Weak convergence of the sequence $\mathcal{F}_{Q,t}(X^\epsilon)$ towards a Gaussian r.v. as $t \rightarrow \infty$ to get the CLT for F_t^X , as a direct cq of CLT for sums of m -dependent r.v. (Hoeffding & Robbins, Berman).
- Combining those points \Rightarrow CLT for $\mathcal{F}_t(X)$

2.2.2 Asymptotics according to the level curve's type

Asymptotic behavior of the expansion of the **number of curve crossings** according to the form of the curve ψ (K.&L., 08)

↗ if ψ **periodic**, a **CLT** can be deduced (we may say, we remain in an ergodic situation similar to the fixed barrier problem).

Ex: cosine barrier $\psi_s = \sqrt{2A} \cos \omega s$ (Rice, Cramér & Leadbetter)

↘ if ψ **linear**, $N_t(\psi) \in L^2(\Omega)$ as $t \rightarrow \infty$.

Ex: case of the **number of specular points**: $\psi(x) := -\kappa x$ with

$\kappa = \text{constant depending on } \begin{cases} d(\text{light source, surface } W(t, x)) \\ d(\text{observer, surface}) \end{cases}$

↪ **Asymptotical behavior of the second moment of the number of specular points as $x \rightarrow \infty$.**

Notations and characterization.

W : Gaussian field defined on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,

\mathbb{R}^+ for the temporal variable and \mathbb{R} for the spatial one;

W_x, W_t : first derivatives w.r.t. the spatial variable x and the temporal variable t respectively;

W_{xx}, W_{tt}, W_{tx} and W_{xt} : second derivatives.

Let consider the process at a **fixed time**, e.g. $t = 0$;

$W(0, x)$ is a centered stationary Gaussian process with correlation function $r(0, x) := r(x)$.

A **specular point** is characterized by (cf. Longuet-Higgins):

$$W_x(0, x) = -\kappa x \quad \text{with} \quad \kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \quad \text{and} \quad h_1, h_2 \text{ s.t.}$$

$(0, h_1), (0, h_2)$: coordinates of a point source of light/observer respectiv.;

it can be interpreted as **a crossing of** the curve $\psi(x) := -\kappa x$ by

$W_x(0, x)$.

The number $N_{[0,x]}$ of specular points in the interval $[0, x]$ satisfies:

Theorem. *If r'' satisfies the Geman condition, then in $L^2(\Omega)$:*

$$N_{[0,x]} = \frac{\gamma}{\eta} \sum_{q=0}^{\infty} \int_0^x F_q \left(s, \frac{W_x(0, s)}{\eta}, \frac{W_{xx}(0, s)}{\gamma} \right) ds, \quad \text{where}$$

$$F_q \left(s, \frac{W_x(0, s)}{\eta}, \frac{W_{xx}(0, s)}{\gamma} \right) = \sum_{l=0}^q \frac{H_{q-l} \left(\frac{-\kappa s}{\eta} \right) \varphi \left(\frac{-\kappa s}{\eta} \right)}{(q-l)!} a_l \left(\frac{-\kappa}{\gamma} \right) H_{q-l} \left(\frac{W_x(0, s)}{\eta} \right) H_l \left(\frac{W_{xx}(0, s)}{\gamma} \right),$$

$\eta = \sqrt{-r''(0)}$, $\gamma = \sqrt{r^{(iv)}(0)}$ and a_l defined previously.

Its expectation is given by

$$\mathbb{E}[N_{[0,x]}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\kappa}{\eta} \left(\int_0^{\frac{\kappa}{\gamma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \frac{\gamma}{\kappa} e^{-\frac{\kappa^2}{2\gamma^2}} \right) \int_0^x \varphi \left(\frac{\kappa s}{\eta} \right) ds,$$

and its variance by

$$\text{Var}(N_{[0,x]}) =$$

$$2 \frac{\gamma}{\eta} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^x \int_0^{x-s} \mathbb{E} \left[F_q \left(s, \frac{W_x(0, s)}{\eta}, \frac{W_{xx}(0, s)}{\gamma} \right) F_q \left(s + \tau, \frac{W_x(0, s + \tau)}{\eta}, \frac{W_{xx}(0, s + \tau)}{\gamma} \right) \right] d\tau ds.$$

Under the m-dependence (when assuming that $-r''(\tau) = 0$ for $\tau > m$), then the asymptotic variance, as $x \rightarrow \infty$, is given by

$$\text{Var}(N_{[0, \infty]}) =$$

$$2 \frac{\gamma}{\eta} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^m \mathbb{E} \left[F_q \left(s, \frac{W_x(0, s)}{\eta}, \frac{W_{xx}(0, s)}{\gamma} \right) F_q \left(s + \tau, \frac{W_x(0, s + \tau)}{\eta}, \frac{W_{xx}(0, s + \tau)}{\gamma} \right) \right] d\tau ds.$$

Remarks.

i) Expectation of $N_{[0, x]}$: first obtained by **Longuet-Higgins**, who considered a bilateral formula, i.e. $\mathbb{E}[N_{[-x, x]}]$, and showed that its

limit as $x \rightarrow \infty$ is given by $\lim_{\frac{\gamma}{\kappa} \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma} \frac{\mathbb{E}[N_{[0, +\infty]}]}{1/\kappa} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$;

interpretation: $N_{[0, x]} \nearrow$ proportionally to $d(\text{observer, sea surface})$

since when $h_1 = h_2$, $\frac{1}{\kappa} = d(\text{observer, sea surface})$.

ii) Number of specular points = finite random variable over all the line, on the contrary to the behavior of a fixed level-crossings or of the number of maxima.

Conclusion

- Crossings theory is very tight to EVT, that is why it is considered as a subfield of EVT.
- Nevertheless, it can be used as a tool to solve problems in various fields, not only related to extremes, as illustrated in some examples.
- Representations in Wiener Chaos = key tool to obtain asymptotical results for complex non linear functionals of Gaussian processes/fields.

Principales ref.

Ensembles aléatoires de niveau:

Adler, R. (1981). *The Geometry of Random Fields*, Wiley.

Adler, R., Taylor, J. (2007). *Random Field and Geometry*, Springer.

Azaïs, J-M., Wschebor, M. (à paraître). *Level sets and extrema of random processes and fields*.

Kratz, M. (2006). *Level crossings and other level functionals of stationary Gaussian processes*, Probab. Survey **3**, 230-288.

Wschebor, M. (1985). *Surfaces aléatoires*, L.N.M. **1147**, Springer-Verlag.

Etude des franchissements:

A. Estrade, I.Iribarren and M. Kratz, *Chord-length distribution functions and Rice formulae. Application to random media*. Preprint.

W. Hoeffding and H. Robbins, *The Central Limit Theorem for dependent random variables*. Duke Math. J. 15 (1948).

M. Kratz and J. León, *Hermite polynomial expansion for non-smooth functionals of stationary Gaussian processes: crossings and extremes*. Stoch. Proc. Applic. vol. 66, (1997).

- M. Kratz and J. León, *Central limit theorems for the number of maxima and some estimator of the second spectral moment of a stationary Gaussian process. Applications in hydroscience.* Extremes 3:1 (2000).
- M. Kratz and J. León, *Central limit theorems for level functionals of stationary Gaussian processes and fields.* J. Theoret. Probab. **14** (2001).
- M. Kratz and J. León, *On the second moment of the number of crossings by a stationary Gaussian process.* Ann. Probab. 34 (2006).
- M. Kratz and J. León, *Level curves, crossings and speed of specular points for Gaussian models.* Submitted preprint.
- M. S. Longuet-Higgins, *Reflection and refraction at a random surface.* I, II, III, Journal of the Optical Society of America, vol.50 (1960).
- M. S. Longuet-Higgins, *The statistical geometry of random surfaces.* Proc. Symp. Appl. Math. Vol.XIII, AMS Providence R.I.(1962).
- E. Slud, *MWI representation of the number of curve-crossings by a differentiable Gaussian process, with applications.* Ann. Probab. 22, No.3 (1994).