

Nummelin splitting for continuous time Harris recurrent Markov processes and applications.

collaboration avec Dasha Loukianova, Evry

- 1 Introduction
- 2 Scission de Nummelin
- 3 Temps continu
- 4 Applications

Introduction

- Observation d'un processus de Markov fort $X = (X_t)_{t \geq 0}$.
- S'il existe un point x_0 récurrent : la trajectoire du processus se décompose en des *cycles de vie* $R_n, n \geq 1$:
 - ① $R_n < \infty$ p.s., $R_{n+1} = R_n + R_1 \circ \theta_{R_n}$.
 - ② $X_{R_n} = x_0$.
 - ③ $(X_{R_n+t})_{t \geq 0}$ est indépendant de $\sigma\{X_s, s \leq R_n\}$.

Introduction

- Observation d'un processus de Markov fort $X = (X_t)_{t \geq 0}$.
- S'il existe un point x_0 récurrent : la trajectoire du processus se décompose en des *cycles de vie* $R_n, n \geq 1$:
 - ① $R_n < \infty$ p.s., $R_{n+1} = R_n + R_1 \circ \theta_{R_n}$.
 - ② $X_{R_n} = x_0$.
 - ③ $(X_{R_n+t})_{t \geq 0}$ est indépendant de $\sigma\{X_s, s \leq R_n\}$.
- Des théorèmes limites tels que le **théorème ergodique pour des fonctionnelles additives** se démontrent comme une simple conséquence de la **loi des grands nombres**.

Introduction

- Observation d'un processus de Markov fort $X = (X_t)_{t \geq 0}$.
- S'il existe un point x_0 récurrent : la trajectoire du processus se décompose en des *cycles de vie* $R_n, n \geq 1$:
 - ① $R_n < \infty$ p.s., $R_{n+1} = R_n + R_1 \circ \theta_{R_n}$.
 - ② $X_{R_n} = x_0$.
 - ③ $(X_{R_n+t})_{t \geq 0}$ est indépendant de $\sigma\{X_s, s \leq R_n\}$.
- Des théorèmes limites tels que le **théorème ergodique pour des fonctionnelles additives** se démontrent comme une simple conséquence de la **loi des grands nombres**.
- Des **théorèmes limites pour des martingales associées à X** peuvent également être démontrés sous une condition sur les queues de la distribution de la longueur d'un cycle de vie $R_2 - R_1$.

- En général, un point récurrent x_0 n'existe pas.....

- En général, un point récurrent x_0 n'existe pas.....
- Athreya et Ney (1978) et Nummelin (1978) donnent une construction qui permet d'introduire un atôme récurrent pour une chaîne de Markov. (Un atôme est un ensemble qui en quelque sorte se comporte comme un point, pour le processus.)

- En général, un point récurrent x_0 n'existe pas.....
- Athreya et Ney (1978) et Nummelin (1978) donnent une construction qui permet d'introduire un atôme récurrent pour une chaîne de Markov. (Un atôme est un ensemble qui en quelque sorte se comporte comme un point, pour le processus.)
- Application dans Höpfner-Löcherbach (2003) pour obtenir des **théorèmes limites pour des martingales fonctionnelles additives** (déjà dans un cadre de processus en temps continu).

- En général, un point récurrent x_0 n'existe pas.....
- Athreya et Ney (1978) et Nummelin (1978) donnent une construction qui permet d'introduire un atôme récurrent pour une chaîne de Markov. (Un atôme est un ensemble qui en quelque sorte se comporte comme un point, pour le processus.)
- Application dans Höpfner-Löcherbach (2003) pour obtenir des **théorèmes limites pour des martingales fonctionnelles additives** (déjà dans un cadre de processus en temps continu).
- Développement dans Löcherbach-Loukianova (2007) au cadre des processus de Markov récurrents en temps continu.

- En général, un point récurrent x_0 n'existe pas.....
- Athreya et Ney (1978) et Nummelin (1978) donnent une construction qui permet d'introduire un atôme récurrent pour une chaîne de Markov. (Un atôme est un ensemble qui en quelque sorte se comporte comme un point, pour le processus.)
- Application dans Höpfner-Löcherbach (2003) pour obtenir des **théorèmes limites pour des martingales fonctionnelles additives** (déjà dans un cadre de processus en temps continu).
- Développement dans Löcherbach-Loukianova (2007) au cadre des processus de Markov récurrents en temps continu.
⇒ **entière caractérisation des vitesses de convergence** dans un problème de statistique lié à l'observation de X – également dans le cas récurrent-nul.

- En général, un point récurrent x_0 n'existe pas.....
- Athreya et Ney (1978) et Nummelin (1978) donnent une construction qui permet d'introduire un atôme récurrent pour une chaîne de Markov. (Un atôme est un ensemble qui en quelque sorte se comporte comme un point, pour le processus.)
- Application dans Höpfner-Löcherbach (2003) pour obtenir des **théorèmes limites pour des martingales fonctionnelles additives** (déjà dans un cadre de processus en temps continu).
- Développement dans Löcherbach-Loukianova (2007) au cadre des processus de Markov récurrents en temps continu.
⇒ **entière caractérisation des vitesses de convergence** dans un problème de statistique lié à l'observation de X – également dans le cas récurrent-nul.
- Pour des chaînes de Markov récurrentes, **Stéphan Cléménçon** utilise la structure régénérative pour construire des procédures d'estimation explicites dont la vitesse de convergence dépasse celle des méthodes classiques.

- En général, un point récurrent x_0 n'existe pas.....
- Athreya et Ney (1978) et Nummelin (1978) donnent une construction qui permet d'introduire un atôme récurrent pour une chaîne de Markov. (Un atôme est un ensemble qui en quelque sorte se comporte comme un point, pour le processus.)
- Application dans Höpfner-Löcherbach (2003) pour obtenir des **théorèmes limites pour des martingales fonctionnelles additives** (déjà dans un cadre de processus en temps continu).
- Développement dans Löcherbach-Loukianova (2007) au cadre des processus de Markov récurrents en temps continu.
 ⇒ **entière caractérisation des vitesses de convergence** dans un problème de statistique lié à l'observation de X – également dans le cas récurrent-nul.
- Pour des chaînes de Markov récurrentes, **Stéphan Cléménçon** utilise la structure régénérative pour construire des procédures d'estimation explicites dont la vitesse de convergence dépasse celle des méthodes classiques.
- Champs d'applications nouveau : les chaînes de Markov d'ordre variable, dont nous parlera **Sandro Gallo**.

Notre sujet d'intérêt pour le quart d'heure qui suit : Dans un cadre général d'un **processus de Markov** récurrent (pas forcément ergodique):
quelle est la
vitesse de convergence dans des procédures statistiques???

Notre sujet d'intérêt pour le quart d'heure qui suit : Dans un cadre général d'un **processus de Markov** récurrent (pas forcément ergodique):
quelle est la
vitesse de convergence dans des procédures statistiques???

Cadre général :

$(X_t)_{t \geq 0}$ processus de Markov fort, à valeurs dans un espace polonais E ,
trajectoires càdlàg,

Notre sujet d'intérêt pour le quart d'heure qui suit : Dans un cadre général d'un **processus de Markov** récurrent (pas forcément ergodique):
 quelle est la
vitesse de convergence dans des procédures statistiques???

Cadre général :

$(X_t)_{t \geq 0}$ processus de Markov fort, à valeurs dans un espace polonais E , trajectoires càdlàg, **récurrent dans le sens de Harris**, i.e.

- ① Il existe une mesure invariante μ .
- ② Pour tout ensemble mesurable A ,

$\mu(A) > 0$ implique que $\limsup 1_A(X_t) = 1$ p.s. .

Notre sujet d'intérêt pour le quart d'heure qui suit : Dans un cadre général d'un **processus de Markov** récurrent (pas forcément ergodique):
 quelle est la
vitesse de convergence dans des procédures statistiques???

Cadre général :

$(X_t)_{t \geq 0}$ processus de Markov fort, à valeurs dans un espace polonais E , trajectoires càdlàg, **récurrent dans le sens de Harris**, i.e.

- ① Il existe une mesure invariante μ .
- ② Pour tout ensemble mesurable A ,

$$\mu(A) > 0 \text{ implique que } \limsup 1_A(X_t) = 1 \text{ p.s. .}$$

μ est unique (à une constante multiplicative près).

Si $\mu(E) < \infty$, X est dit **récurrent positif ou ergodique**, sinon : **récurrent-nul**.

Notre sujet d'intérêt pour le quart d'heure qui suit : Dans un cadre général d'un **processus de Markov** récurrent (pas forcément ergodique):
 quelle est la
vitesse de convergence dans des procédures statistiques???

Cadre général :

$(X_t)_{t \geq 0}$ processus de Markov fort, à valeurs dans un espace polonais E , trajectoires càdlàg, **récurrent dans le sens de Harris**, i.e.

- ① Il existe une mesure invariante μ .
- ② Pour tout ensemble mesurable A ,

$$\mu(A) > 0 \text{ implique que } \limsup 1_A(X_t) = 1 \text{ p.s. .}$$

μ est unique (à une constante multiplicative près).

Si $\mu(E) < \infty$, X est dit **récurrent positif ou ergodique**, sinon : **récurrent-nul**.

Exemples :

- mouvement Brownien en dim 1, 2 : récurrent-nul , $\mu = \lambda$.
- $dX_t = aX_t dt + dB_t^1$, $a < 0$: processus d'Ornstein-Uhlenbeck : récurrent positif, $\mu = \mathcal{N}(0, \frac{1}{2|a|})$.

Connaître la vitesse de convergence veut dire : savoir caractériser le

Comportement asymptotique de fonctionnelles additives.

Connaître la vitesse de convergence veut dire : savoir caractériser le

Comportement asymptotique de fonctionnelles additives.

Fonctionnelles additives :

Connaître la vitesse de convergence veut dire : savoir caractériser le
Comportement asymptotique de fonctionnelles additives.

Fonctionnelles additives :

- $A_t = \int_0^t f(X_s) ds.$

Connaître la vitesse de convergence veut dire : savoir caractériser le
Comportement asymptotique de fonctionnelles additives.

Fonctionnelles additives :

- $A_t = \int_0^t f(X_s) ds.$
- Si $f = 1_A$:

$$A_t = \int_0^t 1_A(X_s) ds$$

est le **temps d'occupation** de l'ensemble A par le processus pendant $[0, t]$.

Connaître la vitesse de convergence veut dire : savoir caractériser le

Comportement asymptotique de fonctionnelles additives.

Fonctionnelles additives :

- $A_t = \int_0^t f(X_s) ds$.
- Si $f = 1_A$:

$$A_t = \int_0^t 1_A(X_s) ds$$

est le **temps d'occupation** de l'ensemble A par le processus pendant $[0, t]$.

- Ou bien : $A_t = \mathcal{L}_t = \frac{1}{2\delta} \int_0^t 1_{[x_0-\delta, x_0+\delta]}(X_s) ds$ en dimension 1 (temps local empirique).

Connaître la vitesse de convergence veut dire : savoir caractériser le
Comportement asymptotique de fonctionnelles additives.

Fonctionnelles additives :

- $A_t = \int_0^t f(X_s) ds.$
- Si $f = 1_A$:

$$A_t = \int_0^t 1_A(X_s) ds$$

est le **temps d'occupation** de l'ensemble A par le processus pendant $[0, t]$.

- Ou bien : $A_t = \mathcal{L}_t = \frac{1}{2\delta} \int_0^t 1_{[x_0-\delta, x_0+\delta]}(X_s) ds$ en dimension 1 (temps local empirique).
- Ou bien : $A_t = L_t^0$ temps local ($d = 1$).

Dans le cas d'un **point récurrent** x_0 et d'une décomposition en cycles de vie R_n associée ($X_{R_n} = x_0$) :

Dans le cas d'un **point récurrent** x_0 et d'une décomposition en cycles de vie R_n associée ($X_{R_n} = x_0$) :

On pose

$$\xi_n := \int_{R_n}^{R_{n+1}} f(X_s) ds.$$

Alors : les $(\xi_n)_n$ sont i.i.d..

Dans le cas d'un **point récurrent** x_0 et d'une décomposition en cycles de vie R_n associée ($X_{R_n} = x_0$) :

On pose

$$\xi_n := \int_{R_n}^{R_{n+1}} f(X_s) ds.$$

Alors : les $(\xi_n)_n$ sont i.i.d..

Cela détermine le comportement asymptotique de $A_t = \int_0^t f(X_s) ds$ (il faut en plus connaître des choses sur $(R_n)_n$!)

Et :

$$\mu(f) = E \int_{R_1}^{R_2} f(X_s) ds.$$

(à une constante près)

Notre but :

Imiter ce genre d'approche aussi dans le cas où il n'y a pas de point récurrent.

Notre but :

Imiter ce genre d'approche aussi dans le cas où il n'y a pas de point récurrent.

C'est-à-dire : plonger notre processus dans un processus de Markov plus grand qui possède (presque) un point récurrent (un atôme ...).

Notre but :

Imiter ce genre d'approche aussi dans le cas où il n'y a pas de point récurrent.

C'est-à-dire : plonger notre processus dans un processus de Markov plus grand qui possède (presque) un point récurrent (un atôme ...).

En temps discret : c'est la **scission de Nummelin** qui permet de faire cela.

Notre but :

Imiter ce genre d'approche aussi dans le cas où il n'y a pas de point récurrent.

C'est-à-dire : plonger notre processus dans un processus de Markov plus grand qui possède (presque) un point récurrent (un atôme ...).

En temps discret : c'est la **scission de Nummelin** qui permet de faire cela.

Après : généralisation au temps continu...

Scission de Nummelin en temps discret

Nummelin (1978), Athreya-Ney (1978)

Soit X_1, X_2, \dots une chaîne de Markov récurrente dans le sens de Harris.

Scission de Nummelin en temps discret

Nummelin (1978), Athreya-Ney (1978)

Soit X_1, X_2, \dots une chaîne de Markov récurrente dans le sens de Harris.

Condition de Minoration

$$P_1(x, dy) \geq p 1_C(x) \nu(dy)$$

où $0 < p < 1$, $\mu(C) > 0$, ν est une mesure de probabilité.

Scission de Nummelin en temps discret

Nummelin (1978), Athreya-Ney (1978)

Soit X_1, X_2, \dots une chaîne de Markov récurrente dans le sens de Harris.

Condition de Minoration

$$P_1(x, dy) \geq p 1_C(x) \nu(dy)$$

où $0 < p < 1$, $\mu(C) > 0$, ν est une mesure de probabilité.

Construction d'une chaîne (Y_n, U_n) telle que

- ① $(Y_n) \sim (X_n)$.
- ② U_n i.i.d., $\sim \mathcal{B}(p)$.

Les transitions

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Si } Y_n \in C, U_n = 1 : Y_{n+1} \sim \nu(dy) \\
 \text{Si } Y_n \in C, U_n = 0 : Y_{n+1} \sim \frac{1}{1-p} (P_1(Y_n, dy) - p\nu(dy)) \\
 \text{Si } Y_n \notin C : Y_{n+1} \sim P_1(Y_n, dy)
 \end{array} \right\} := \\
 = Q((Y_n, U_n), dy)$$

$U_{n+1} \sim \mathcal{B}(p)$, indépendant de Y_{n+1} .

Propriétés

① $\mathcal{L}(Y_{n+1} | Y_n = x) = P_1(x, dy)$

② Posons

$$A := C \times \{1\}, \tau_A := \inf\{n : (Y_n, U_n) \in A\}.$$

Alors

$$(Y_{\tau_A+1}, U_{\tau_A+1}) \Pi \mathcal{F}_{\tau_A}, Y_{\tau_A+1} \sim \nu.$$

Propriétés

① $\mathcal{L}(Y_{n+1} | Y_n = x) = P_1(x, dy)$

② Posons

$$A := C \times \{1\}, \tau_A := \inf\{n : (Y_n, U_n) \in A\}.$$

Alors

$$(Y_{\tau_A+1}, U_{\tau_A+1}) \Pi \mathcal{F}_{\tau_A}, Y_{\tau_A+1} \sim \nu.$$

$\tau_A + 1$ est un **temps de régénération**.

Scission de Nummelin en temps continu

$X = (X_t)_t$ processus en temps continu.

Hypothèse : $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\Lambda(dy)$.

Méthode classique :

Soient $(\sigma_n)_n \amalg X$ i.i.d. $\sim \exp(1)$, soit $T_n = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$.

Scission de Nummelin en temps continu

$X = (X_t)_t$ processus en temps continu.

Hypothèse : $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\Lambda(dy)$.

Méthode classique :

Soient $(\sigma_n)_n \amalg X$ i.i.d. $\sim \exp(1)$, soit $T_n = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$.

Alors $(X_{T_n})_n$ est une chaîne de Markov récurrente, avec opérateur de transition

$$U^1(x, dy) = \int_0^\infty e^{-t} P_t(x, dy) dt.$$

Scission de Nummelin en temps continu

$X = (X_t)_t$ processus en temps continu.

Hypothèse : $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\Lambda(dy)$.

Méthode classique :

Soient $(\sigma_n)_n$ II X i.i.d. $\sim \exp(1)$, soit $T_n = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$.

Alors $(X_{T_n})_n$ est une chaîne de Markov récurrente, avec opérateur de transition

$$U^1(x, dy) = \int_0^\infty e^{-t} P_t(x, dy) dt.$$

C'est la **résolvente** du processus.

Scission de Nummelin en temps continu

$X = (X_t)_t$ processus en temps continu.

Hypothèse : $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\Lambda(dy)$.

Méthode classique :

Soient $(\sigma_n)_n$ II X i.i.d. $\sim \exp(1)$, soit $T_n = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$.

Alors $(X_{T_n})_n$ est une chaîne de Markov récurrente, avec opérateur de transition

$$U^1(x, dy) = \int_0^\infty e^{-t} P_t(x, dy) dt.$$

C'est la **résolvente** du processus.

Proposition (Revuz)

La condition de minoration est satisfaite par U^1 !

Scission de Nummelin en temps continu

$X = (X_t)_t$ processus en temps continu.

Hypothèse : $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\Lambda(dy)$.

Méthode classique :

Soient $(\sigma_n)_n \amalg X$ i.i.d. $\sim \exp(1)$, soit $T_n = \sigma_1 + \dots + \sigma_n$.

Alors $(X_{T_n})_n$ est une chaîne de Markov récurrente, avec opérateur de transition

$$U^1(x, dy) = \int_0^\infty e^{-t} P_t(x, dy) dt.$$

C'est la **résolvente** du processus.

Proposition (Revuz)

La condition de minoration est satisfaite par U^1 !

Donc : on peut appliquer la scission à $(X_{T_n})_n$!

Très brève aperçu de la construction : Construction récursive sur des intervalles de temps $[T_n, T_{n+1}[$.

Très brève aperçu de la construction : Construction récursive sur des intervalles de temps $[T_n, T_{n+1}[$.

- 1 Au moment T_n : on applique la scission de Nummelin pour simuler (prédire) $X_{T_{n+1}}$.

Très brève aperçu de la construction : Construction récursive sur des intervalles de temps $[T_n, T_{n+1}[$.

- 1 Au moment T_n : on applique la scission de Nummelin pour simuler (prédire) $X_{T_{n+1}}$.
- 2 On remplit le processus $(X_t)_{T_n < t < T_{n+1}}$ selon la loi du pont du processus de Markov.

Très brève aperçu de la construction : Construction récursive sur des intervalles de temps $[T_n, T_{n+1}[$.

- ① Au moment T_n : on applique la scission de Nummelin pour simuler (prédire) $X_{T_{n+1}}$.
- ② On remplit le processus $(X_t)_{T_n < t < T_{n+1}}$ selon la loi du pont du processus de Markov.

On construit ainsi un processus de Markov Z_t à trois coordonnées tel que :

$$Z_{T_n} = (X_{T_n}, U_n, X_{T_{n+1}}).$$

La troisième coordonnée est une projection dans le futur. Donc : on change **la structure de l'histoire du processus ...!**, autrement dit sa filtration est bien plus riche.....

Propriétés

- ① Soit P_x la loi sous laquelle Z part de $Z_0^1 = x$, $Z_0^2 \sim \mathcal{B}(p)$, $Z_0^3 \sim Q((x, Z_0^2), dx')$. Alors sous P_x :

$$(Z_t^1)_t \sim (X_t)_t.$$

- ② Z est Markov, Markov fort sous des hypothèses plus fortes sur la régularité de la résolvante.

Décomposition en cycles de vie associée

Posons

$$A := C \times \{1\} \times E,$$

$$S_1 := \inf\{T_n : Z_{T_n} \in A\}$$

$$R_1 := \inf\{T_m : T_m > S_1\}, R_{n+1} = R_n + R_1 \circ \partial_{R_n}.$$

Décomposition en cycles de vie associée

Posons

$$A := C \times \{1\} \times E,$$

$$S_1 := \inf\{T_n : Z_{T_n} \in A\}$$

$$R_1 := \inf\{T_m : T_m > S_1\}, R_{n+1} = R_n + R_1 \circ \partial_{R_n}.$$

•

$$Z_{R_n}^1 \sim \nu.$$

Décomposition en cycles de vie associée

Posons

$$A := C \times \{1\} \times E,$$

$$S_1 := \inf\{T_n : Z_{T_n} \in A\}$$

$$R_1 := \inf\{T_m : T_m > S_1\}, R_{n+1} = R_n + R_1 \circ \partial_{R_n}.$$

-

$$Z_{R_n}^1 \sim \nu.$$

- Indépendance après trou :

$$Z_{R_n+} \text{ II } \mathcal{F}_{S_n-}.$$

- **2-indépendence :**

$$(Z_{R_n+t})_{t \leq R_{n+1}-R_n} \text{ II } (Z_{R_{n+2}+t})_{t \leq R_{n+3}-R_{n+2}}.$$

Autrement dit :

- 2-indépendence :

$$(Z_{R_n+t})_{t \leq R_{n+1}-R_n} \text{ II } (Z_{R_{n+2}+t})_{t \leq R_{n+3}-R_{n+2}}.$$

Autrement dit :

$$\xi_n := \int_{R_n}^{R_{n+1}} f(X_s) ds.$$

Alors les ξ_n sont 2-indépendants, de même loi. Et :

$$\mu(f) = E\xi_n.$$

Equivalent déterministe de fonctionnelles additives.

Fixons une fonction g bornée, à support compact. Posons

$$v_t := E \int_0^t g(X_s) ds.$$

Equivalent déterministe de fonctionnelles additives.

Fixons une fonction g bornée, à support compact. Posons

$$v_t := E \int_0^t g(X_s) ds.$$

Remarque :

Equivalent déterministe de fonctionnelles additives.

Fixons une fonction g bornée, à support compact. Posons

$$v_t := E \int_0^t g(X_s) ds.$$

Remarque :

- si X est récurrent positif (ergodique), $v_t = t$.

Equivalent déterministe de fonctionnelles additives.

Fixons une fonction g bornée, à support compact. Posons

$$v_t := E \int_0^t g(X_s) ds.$$

Remarque :

- si X est récurrent positif (ergodique), $v_t = t$.
- si X est régulier :

$$P(R_2 - R_1 > x) \sim x^{-\beta} l(x),$$

où $0 < \beta < 1$, alors

Equivalent déterministe de fonctionnelles additives.

Fixons une fonction g bornée, à support compact. Posons

$$v_t := E \int_0^t g(X_s) ds.$$

Remarque :

- si X est récurrent positif (ergodique), $v_t = t$.
- si X est régulier :

$$P(R_2 - R_1 > x) \sim x^{-\beta} l(x),$$

où $0 < \beta < 1$, alors

$$v_t \sim t^\beta.$$

Equivalent déterministe de fonctionnelles additives.

Fixons une fonction g bornée, à support compact. Posons

$$v_t := E \int_0^t g(X_s) ds.$$

Remarque :

- si X est récurrent positif (ergodique), $v_t = t$.
- si X est régulier :

$$P(R_2 - R_1 > x) \sim x^{-\beta} l(x),$$

où $0 < \beta < 1$, alors

$$v_t \sim t^\beta.$$

Reinhard parlera d'une application statistique dans cette situation.

Equivalent déterministe de fonctionnelles additives.

Fixons une fonction g bornée, à support compact. Posons

$$v_t := E \int_0^t g(X_s) ds.$$

Remarque :

- si X est récurrent positif (ergodique), $v_t = t$.
- si X est régulier :

$$P(R_2 - R_1 > x) \sim x^{-\beta} l(x),$$

où $0 < \beta < 1$, alors

$$v_t \sim t^\beta.$$

Reinhard parlera d'une application statistique dans cette situation.

Exemple : $X = B^1$, Brownien en dimension un : $\beta = 1/2$, $v_t \sim \sqrt{t}$.

Théorème : Equivalent déterministe

Si $\mu(f) \in]0, \infty[$, alors

Théorème : Equivalent déterministe

Si $\mu(f) \in]0, \infty[$, alors

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{t \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{M} \leq \frac{1}{v_t} \int_0^t f(X_s) ds \leq M \right) = 1.$$

Théorème : Equivalent déterministe

Si $\mu(f) \in]0, \infty[$, alors

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{t \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{M} \leq \frac{1}{v_t} \int_0^t f(X_s) ds \leq M \right) = 1.$$

v_t est la *vitesse de convergence* du processus X .

Théorème : Equivalent déterministe

Si $\mu(f) \in]0, \infty[$, alors

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{t \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{M} \leq \frac{1}{v_t} \int_0^t f(X_s) ds \leq M \right) = 1.$$

v_t est la *vitesse de convergence* du processus X .

v_t est l'**équivalent déterministe** de toute fonctionnelle additive intégrable du processus.

Théorème : Equivalent déterministe

Si $\mu(f) \in]0, \infty[$, alors

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{t \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{M} \leq \frac{1}{v_t} \int_0^t f(X_s) ds \leq M \right) = 1.$$

v_t est la *vitesse de convergence* du processus X .

v_t est l'**équivalent déterministe** de toute fonctionnelle additive intégrable du processus.

Remarques :

- ① Connue en $d = 1$ (temps local!!!); voir Delattre, Hoffmann, Kessler 2002 (prépublication du LPMA), et Loukianova/Loukianov (2005)

Théorème : Equivalent déterministe

Si $\mu(f) \in]0, \infty[$, alors

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{t \rightarrow \infty} P \left(\frac{1}{M} \leq \frac{1}{v_t} \int_0^t f(X_s) ds \leq M \right) = 1.$$

v_t est la *vitesse de convergence* du processus X .

v_t est l'**équivalent déterministe** de toute fonctionnelle additive intégrable du processus.

Remarques :

- ① Connue en $d = 1$ (temps local!!!); voir Delattre, Hoffmann, Kessler 2002 (prépublication du LPMA), et Loukianova/Loukianov (2005)
- ② En temps discret : Chen, 1999 : “How often does a Harris recurrent Markov chain recur?”

Estimation à noyau

Observons une diffusion en dim d :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

b Hölder (α) est à estimer.

Estimation à noyau

Observons une diffusion en dim d :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

b Hölder (α) est à estimer.

Conditions

- X récurrente avec mesure invariante $\mu(dx) = p(x)dx$

Estimation à noyau

Observons une diffusion en dim d :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

b Hölder (α) est à estimer.

Conditions

- X récurrente avec mesure invariante $\mu(dx) = p(x)dx$
- $p(\cdot) > 0$, p continue.

Estimation à noyau

Observons une diffusion en dim d :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

b Hölder (α) est à estimer.

Conditions

- X récurrente avec mesure invariante $\mu(dx) = p(x)dx$
- $p(\cdot) > 0$, p continue.

Estimateur à noyau :

$$\hat{b}_t(x_0) := \frac{\int_0^t \varphi\left(\frac{X_s - x_0}{h_t}\right) dX_s}{\int_0^t \varphi\left(\frac{X_s - x_0}{h_t}\right) ds}.$$

Choix de h_t :

$$h_t = v_t^{-1/2\alpha+d},$$

où v_t est l'équivalent déterministe de X .

Choix de h_t :

$$h_t = v_t^{-1/2\alpha+d},$$

où v_t est l'équivalent déterministe de X .

Remarques :

- v_t n'est pas observable.
- Remplacer v_t par $V_t = \int_0^t g(X_s) ds$??? (ce qui nous amenerait à travailler avec une taille de fenêtre aléatoire)

Théorème : Vitesse de convergence

Soit $r_t = v_t^{\alpha/2\alpha+d}$. Alors

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} P_\pi \left(r_t |\hat{b}_t(x_0) - b(x_0)| > M \right) = 0.$$

Théorème : Vitesse de convergence

Soit $r_t = v_t^{\alpha/2\alpha+d}$. Alors

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} P_\pi \left(r_t |\hat{b}_t(x_0) - b(x_0)| > M \right) = 0.$$

Ingrédients de la preuve :

①

$$\frac{1}{v_t} E_\pi \int_0^t \varphi \left(\frac{X_s - x_0}{h_t} \right) ds \rightarrow p(x_0)$$

(convergence diagonale)

Théorème : Vitesse de convergence

Soit $r_t = v_t^{\alpha/2\alpha+d}$. Alors

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} P_\pi \left(r_t |\hat{b}_t(x_0) - b(x_0)| > M \right) = 0.$$

Ingrédients de la preuve :

①

$$\frac{1}{v_t} E_\pi \int_0^t \varphi \left(\frac{X_s - x_0}{h_t} \right) ds \rightarrow p(x_0)$$

(convergence diagonale)

② Equivalent déterministe uniforme :

$$\lim_M \liminf P_\pi \left(\frac{1}{M} \leq \frac{1}{v_t} \int_0^t \varphi \left(\frac{X_s - x_0}{h_t} \right) ds \leq M \right) = 1.$$

Références :

- ① Athreya, K.B., Ney, P. A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains. Trans. Am. Math. Soc. 245 (1978), 493-501.
- ② Chen, X. How often does a Harris recurrent Markov chain recur? Ann. Probab. 27 (1999), 1324–1346.
- ③ Löcherbach, E., Loukianova, D.. On Nummelin splitting for cont. time Harris rec. Markov processes and application to kernel estimation for multi-dimensional diffusions. To appear in SPA 2008.
- ④ Loukianova,D.; Loukianov,O.: Deterministic equivalents of additive functionals of recurrent diffusions and drift estimation, Statistical Inference for stochastics processes, p107-121, 2008, Vol 11, Issue2
- ⑤ Loukianova,D.; Loukianov,O.(2006): Uniform deterministic equivalent of AF of recurrent diffusions and non-parametric drift estimation, Annales de l'IHP ,Volume 44, Number 4 (2008), 771-786
- ⑥ Nummelin, E. A splitting technique for Harris recurrent Markov chains. Z. W.theorie Verw. Geb. 43 (1978), 309–318.