Comportement extrême des processus autorégressfs multivariés

Serge Pergamenchtchikov

www.univ-rouen.fr/LMRS/Persopage/Pergamenchtchikov/

Congrès Modélisation et Statistique des Réseaux 2008

Rennes, 27-29 août, 2008

Sommaire

MODÈLE

Modèle autoregressif dans $\mathbb{R}^q$:

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + \zeta_n$$

où
(A_n) sont des matrices aléatoires de taille $q \times q$
(ζ_n) suite des vecteurs aléatoirs dans $\mathbb{R}^q$
Problème :
Etudier la distribution de la valeur extrêmale de ce processus

$$M_n = \max_{1 \le k \le n} z' Y_k$$

$z \in \mathbb{R}^q$ $\qquad |z| = 1$
Trouver une suite non-aléatoire $d_n \to \infty$ telle qu'il existe

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(M_n / d_n \le x\right)$$

EXEMPLE

Modèle ARCH autoregressif :

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \cdots + a_q x_{n-q} + \sqrt{1 + \sigma_1^2 x_{n-1}^2 + \cdots + \sigma_q^2 x_{n-q}^2}\, \varepsilon_n$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$

$$M_n = \max_{1\leq k\leq n} x_k$$

EXEMPLE

On peut montrer que pour tout $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le n} x_k \in \Gamma\right) = \mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le n} y_k \in \Gamma\right) ,$$

où

$$y_n = \alpha_1(n)y_{n-1} + \cdots + \alpha_q(n)y_{n-q} + \xi_n \,.$$

Les variables aléatoires

$$\alpha_i(n) = a_i + \sigma_i \eta_i(n)$$

les suites des vecteurs $(\eta(n) = (\eta_1(n), \ldots, \eta_q(n))')_{n\ge1}$ et le bruit $(\xi_n)_{n\ge1}$ sont indépendentes et chaque suite est i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$.

EXEMPLE

$$Y_n = (y_n, \ldots, y_{n-q+1})' \in \mathbb{R}^q$$

$$y_n = z' Y_n \quad \text{avec} \quad z = (1, \ldots, 0)'$$

Le processus (Y_n) vérifie l'équation :

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + \zeta_n \,, \quad n \geq 1 \,,$$

où $\zeta_n = (\xi_n, 0, \ldots, 0)'$ et

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha_1(n) & \cdots & \alpha_q(n) \\ & & \\ I_{q-1} & & 0 \\ & & \end{pmatrix} .$$

Dans ce cas $((A_n, \zeta_n))_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. et A_n sont des $(q \times q)$ - matrices aléatoires gaussiannes.

PLAN

- Stationarité
- Ergodicité uniforme
- Mélange
- Comportement de la queue
- Variation régulière
- Indice de stationarité
- Processus ponctuel des excès

STATIONARITÉ

Les conditions d'existence d'une solution stationaire Kesten (1974) et Goldie et Maller (2000)

$$\mathbb{E} \log^+ |A_1| < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \log^+ |\zeta_1| < \infty$$

et l'exposant de Lyapunov γ vérifie

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \log |A_1 \cdots A_n| < 0 \,.$$

On utilise la condition de Nicholls et Quinns (1982).
$\mathbf{D_0}$) *Les valeurs propres de la matrice*

$$\mathbb{E} \, A_1 \otimes A_1$$

ont les modulis plus petit que un, $\otimes$ *est un produit de matrices de Kronecker.*

STATIONARITÉ

Théorème. (Feigin et Tweedie, 1985)
Sous la condition $\mathbf{D_0}$ *on a*
$Y_n = (y_n, \ldots, y_{n-q+1})' \longrightarrow Y_\infty$ *quand* $n \to \infty$

$$Y_\infty = \zeta_1 + \sum_{k=2}^{\infty} A_1 \cdots A_{k-1} \zeta_k \,.$$

En tenant compte que

$$\mathbb{E}\left((A_1 \cdots A_n) \otimes (A_1 \cdots A_n)\right) = \left(\mathbb{E}\left(A_1 \otimes A_1\right)\right)^n$$

la condition $\mathbf{D_0}$ entraine que

$$\mathbb{E}\left|A_1 \cdots A_n\right|^2 \leq c e^{-\gamma n}$$

pour $c, \gamma > 0$.
Cela implique que la série est convergente p.s. et le deuxième moment de Y_∞ est fini.

ERGODICITÉ UNIFORME

On dénote par $\pi(\cdot)$ la distribution de Y_∞ dans $\mathbb{R}^q$ et par $\mathbf{P}^n(x,\cdot)$ la n-èmme puissance de la distribution de passage,

$$\mathbf{P}^n(x,\Gamma) = \mathbf{P}(Y_n \in \Gamma \,|\, Y_0 = x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^q, \Gamma \subseteq \mathbb{R}^q$$

Meyn et Tweedie (1993)
On fixe une fonction $v : \mathbb{R}^q \to [1,+\infty]$ et on définit la v distance entre mesures $\mathbf{P}^n(x,\cdot)$ et π par

$$|||\mathbf{P}^n - \pi|||_v = \sup_{x\in\mathbb{R}^q} \frac{\|\mathbf{P}^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_v}{v(x)}$$

où

$$\|\mathbf{P}^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_v = \sup_{0\le f\le v} \left| \int_{\mathbb{R}^q} f(z)\,(\mathbf{P}^n(x,\mathrm{d}z) - \pi(\mathrm{d}z)) \right|$$

ERGODICITÉ UNIFORME

La chaîne de Markov (Y_n) s'appelle v ergodique uniforme s'il existe
des constantes $R > 0$ et $0 < \rho < 1$ telles que pour tout $n \geq 1$

$$|||\mathbf{P}^n - \pi|||_v \leq R\,\rho^n \,.$$

On suppose les conditions suivantes
$\mathbf{C}_1$) (A_n) *et* (ζ_n) *sont idépendantes i.i.d. suite telles que*

$$\mathbb{E}\,|A_1|^2 < \infty\,, \quad \mathbb{E}\,\zeta = 0 \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}\,|\zeta_1|^2 < \infty\,.$$

$\mathbf{C}_2$) *La chaîne de Markov* (Y_n) *est apériodique et irréductivle par rapport une mesure non triviale dans* $\mathbb{R}^q$.

ERGODICITÉ UNIFORME

Feigin et Tweedie (1985) ; Meyn et Tweedie (1993)

Théorème.

Sous les conditions $\mathbf{C}_1$), $\mathbf{C}_2$) *et* $\mathbf{D}_0$)
la chaîne (Y_n) *est* v *ergodique uniforme avec*

$$v(x) = 1 + x'Tx\,,$$

où T *est une* $q \times q$ *matrice positivement définie.*

MÉLANGE

$(Y_n)_{-\infty<n<\infty}$ est un processus stationaire
Coefficient de mélange :

$$\alpha^*_k := \sup_{A \in \mathcal{F}_{0-}\,, B \in \mathcal{F}_{k+}} \left| \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \right| ,$$

où

$$\mathcal{F}_{0-} = \sigma\{\ldots, Y_{-1}, Y_0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{k+} = \sigma\{Y_k, Y_{k+1}, \ldots\}$$

Théorème.
On suppose que les conditions $\mathbf{C}_1$), $\mathbf{C}_2$) *et* $\mathbf{D}_0$) *sont vérifiées.*
Alors il existe des constantes $C^* >$ *et* $0 < \rho < 1$ *telles que pour tout* $k \geq 1$

$$\alpha^*_k \leq C^* \rho^k \,.$$

COMPORTEMENT DE LA QUEUE

Le problème est d'étudier le comportement de

$$\mathbf{P}(z' Y_\infty > t)$$

quand $t \to \infty$ pour tout $z \in \mathcal{S}$, où $\mathcal{S} = \{z \in R^q : |z| = 1\}$.

Kesten (1973) et Le Page (1983)

$$t^\lambda \, \mathbf{P}(z'Y > t) \underset{t\to\infty}{\approx} \mathbb{E}_z \sum_{n=0}^{\infty} g(z_n, t - v_n) := G(z,t)$$

Les processus $(z_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont définis par

$$z_n = \frac{A'_n \, z_{n-1}}{|A'_n \, z_{n-1}|}$$

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \,, \quad u_i = \ln |A'_i \, z_{i-1}|$$

THÉORIE de RENOUVELLEMENT

Soient $\mathcal{S}$ un espace d'etat et $g : S \times R \to R$ une fonction continue telle que

Directly Riemann Integrability

$$\sum_{k\geq 0}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (k+1) \sup_{z\in C_k} \sup_{l\leq t\leq l+1} |g(z,t)| < \infty$$

$$\mathcal{S} = \cup_{k\geq 1} C_k$$

Kesten (1974) , Le Page (1983) :

$$\lim_{t\to\infty} G(z,t) = \frac{1}{\beta} \int_{\mathcal{S}} \pi(dz) \int_{-\infty}^{\infty} g(z,u)\, du\,.$$

THÉORIE de RENOUVELLEMENT

Soient S un ensemble compact dans R^q et $g : S \times R \to R$ une fonction continue telle que

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sup_{x \in \mathcal{S}} \sup_{l \le t \le l+1} |g(x,t)| < \infty\,.$$

$$G(z,t) \;=\; \mathbb{E}_z \sum_{k=0}^{\infty} g(z_k, t - v_k)$$

Klüppelberg et Pergamenchtchikov (2003) :

$$\lim_{t\to\infty} G(z,t) \;=\; \frac{1}{\beta} \int_S \pi(dx) \int_{-\infty}^{\infty} g(x,u)\, du\,.$$

COMPORTEMENT DE LA QUEUE

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + \zeta_n$$

H. Kesten (1974) ($A_n > 0$, éléments sont positives p.s.) ;
B. de Saporta, Y. Guivarc'h, E. Le Page (2004)
(conditions sur le support de A_n)
Klüppelberg et Pergamenchtchikov (2004)

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha_1(n) & \cdots & \alpha_q(n) \\ I_{q-1} & & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall z \in \mathcal{S}$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\lambda} \mathbf{P}(z' Y_\infty > t) = h(z)\,,$$

où $h(\cdot)$ est une fonction continue et strictement positive

VARIATION RÉGULIÈRE

"Variation Regulière dans le sens de Kesten"

$\mathbf{H}_0$) *Il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $\forall z \in \mathcal{S} = \{z \in \mathbb{R}^q \ : \ |z| = 1\}$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\lambda}\,\mathbf{P}(z'Y_{\infty} > t) = h(z)\,,$$

où $h(\cdot)$ *est une fonction continue et strictement positive.*
On définit la famille des mesures

$$Q_t(\Gamma) = \mathbf{P}(t^{-1}Y_\infty \in \Gamma \mid t^{-1}Y_\infty \in W_z)$$

où
$W_z = \{y \in \mathbb{R}^q \ : \ z'y \ > \ 1\}$ et $\Gamma \in \mathbb{R}^q$.
Basrak, Davis et Mikosch (2002) :
Si λ dans la condition $\mathbf{H}_0$ n'est pas un numbre entier alors il existe limite faible dans $\mathbb{R}^q$

$$Q_t \Rightarrow Q \qquad \text{quand} \quad t \to \infty$$

INDICE DE STATIONARITÉ

On considère un processus stationaire $(y_k)_{k\geq 1}$ tel que $\forall \tau > 0$ il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbf{P}(y_1 > u_n(\tau)) = \tau\,.$$

S'il existe une constante $0 < \theta \leq 1$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbf{P}(\max_{1\leq k\leq n} y_k \leq u_n(\tau)) = e^{-\theta\tau}$$

alors θ s'appele un *indice de stationarité* ou un *indice extremale*.

INDICE DE STATIONARITÉ

Théorème. (Rootzén (1988))
On suppose que le coefficient de mélange

$$\alpha_k^* \to 0 \quad \textit{quand} \quad k \to \infty\,.$$

ALors le processus $(y_k)_{k\ge 1}$ *a un indice de de stationarité* $0 < \theta \le 1$ *ss'il existe* $\tau_0 > 0$ *tel que pour* $u_n = u_n(\tau_0)$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\left|\mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le[\epsilon n]} y_k \le u_n | y_0 > u_n\right) - \theta\right| = 0\,.$$

INDICE DE STATIONARITÉ

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + \zeta_n$$

Théorème (Klüppelberg et Pergamenchtchikov (2007)) :
Si λ dans la condition $\mathbf{H}_0$) n'est pas un nombre entier alors pour tout $z \in \mathcal{S}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(n^{-1/\lambda} \max_{1\le k\le n} z' Y_k \le x) = e^{-\theta(z)\, h(z)\, x^{-\lambda}}\,, \quad x > 0\,,$$

où

$$\theta(z) = \int_{\mathbb{R}^q} g(z,y)\, Q(dy) > 0$$

et

$$g(z,y) = \mathbf{P}(\max_{j\ge 1} z'\, A_j \cdots A_1\, y \le 1)\,.$$

PROCESSUS PONCTUEL des EXCÈS

$$N_n(A) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{j/n \in A\}} \mathbf{1}_{\{z' Y_j > u_n\}}$$

$u_n = n^{1/\lambda} x$ pour $x > 0$ fixè

Théorème (Klüppelberg et Pergamenchtchikov (2007)) :
Si λ dans la condition $\mathbf{H}_0$) n'est pas un nombre entier alors pour tout $A \subset [0,1]$ et pour tout $z \in \mathcal{S}$

$$N_n(A) \Rightarrow \tilde{N}(A)\,, \quad n \to \infty$$

$\tilde{N}$ est un processus de Poisson composé.

PROCESSUS de POISSON COMPOSÈ

$$\tilde{N}(\cdot) = \sum_{j=1}^{N(\cdot)} \nu_j$$

N est une mesure de Poisson de paramètre $\theta\,\tau$,
$(\tau = h(z)x^{-\lambda})$ et
(ν_j) est une suite i.i.d. à valeur dans $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ telle que

$$\mathbf{P}(\nu_j = k) \; = \; \frac{\theta_k - \theta_{k+1}}{\theta}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

$\theta_1 = \theta \geq \theta_2 \geq \theta_3 \geq \ldots \geq 0$ et $\theta_k \to 0$

$$\theta_k = \int_{\mathbb{R}^q} g_k(z,y)\,Q(\mathrm{d}y)\,,$$

où $g_k(z,y) = \mathbf{P}\left(\varsigma(z,y) = k-1\right)$ et

$$\varsigma(z,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{z'\,A_j \cdots A_1\,y > 1\}}\,.$$