Probabilités non-commutatives et algèbres de von Neumann des groupes

SMAI, MAS 2008

Rennes, 29 août 2008

Mesure $\mathbb{P}$ sur espace mesurable tribu $(\Omega, \mathcal{F})$

- $\mathcal{F}$ est un treillis σ-complet :
  - ensemble partiellement ordonné (par inclusion) vérifiant

$$A \wedge B = \mathrm{span} A \cup B \in \mathcal{F} \text{ et } A \vee B = A \cap B \in \mathcal{F}$$

    (vraies aussi pour des familles dénombrables)
  - ayant bornes inférieure $0 = \emptyset$ $\{\mathbf{0}\}$ et supérieure $1 = \Omega$ $\mathcal{H}$ universelles
- orthocomplémenté : $A' = A^c A^\perp$ vérifiant $A \vee A' = 1$ et $A \wedge A' = 0$
- distributif : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (et duale)
- orthomodulaire : $A \leq C : A \vee (A' \wedge C) = C$

Exemple : $\mathcal{F}$ la famille de sous-espaces fermés d'un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable

Mesure $\mathbb{P}$ sur espace mesurable tribu $(\Omega, \mathcal{F})$

- $\mathcal{F}$ est un treillis σ-complet :
  - ensemble partiellement ordonné (par inclusion) vérifiant

$$A \wedge B = \mathrm{span} A \cup B \in \mathcal{F} \text{ et } A \vee B = A \cap B \in \mathcal{F}$$

(vraies aussi pour des familles dénombrables)

  - ayant bornes inférieure $0 = \emptyset$ $\{\mathbf{0}\}$ et supérieure $1 = \Omega$ $\mathcal{H}$ universelles
- orthocomplémenté : $A' = A^c A^{\perp}$ vérifiant $A \vee A' = 1$ et $A \wedge A' = 0$
- distributif : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (et duale)
- orthomodulaire : $A \leq C : A \vee (A' \wedge C) = C$

Exemple : $\mathcal{F}$ la famille de sous-espaces fermés d'un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable

Mesure $\mathbb{P}$ sur espace mesurable tribu $(\Omega, \mathcal{F})$

- $\mathcal{F}$ est un treillis σ-complet :
  - ensemble partiellement ordonné (par inclusion) vérifiant

$$A \wedge B = \mathrm{span} A \cup B \in \mathcal{F} \text{ et } A \vee B = A \cap B \in \mathcal{F}$$

(vraies aussi pour des familles dénombrables)

  - ayant bornes inférieure $0 = \emptyset$ $\{\mathbf{0}\}$ et supérieure $1 = \Omega$ $\mathcal{H}$ universelles
- orthocomplémenté : $A' = A^c A^\perp$ vérifiant $A \vee A' = 1$ et $A \wedge A' = 0$
- distributif : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (et duale)
- orthomodulaire : $A \le C : A \vee (A' \wedge C) = C$

Exemple : $\mathcal{F}$ la famille de sous-espaces fermés d'un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable

Mesure $\mathbb{P}$ sur espace mesurable tribu $(\Omega, \mathcal{F})$

- $\mathcal{F}$ est un treillis σ-complet :
  - ensemble partiellement ordonné (par inclusion) vérifiant

$$A \wedge B = \text{span} A \cup B \in \mathcal{F} \text{ et } A \vee B = A \cap B \in \mathcal{F}$$

  (vraies aussi pour des familles dénombrables)
  - ayant bornes inférieure $0 = \emptyset$ $\{0\}$ et supérieure $1 = \Omega$ $\mathcal{H}$ universelles
- orthocomplémenté : $A' = A^c A^\perp$ vérifiant $A \vee A' = 1$ et $A \wedge A' = 0$
- distributif : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (et duale)
- orthomodulaire : $A \leq C : A \vee (A' \wedge C) = C$

Exemple : $\mathcal{F}$ la famille de sous-espaces fermés d'un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable

Mesure $\mathbb{P}$ sur espace mesurable tribu $(\Omega, \mathcal{F})$

- $\mathcal{F}$ est un treillis σ-complet :
  - ensemble partiellement ordonné (par inclusion) vérifiant

$$A \wedge B = \mathrm{span} A \cup B \in \mathcal{F} \text{ et } A \vee B = A \cap B \in \mathcal{F}$$

(vraies aussi pour des familles dénombrables)

  - ayant bornes inférieure $0 = \emptyset$ $\{0\}$ et supérieure $1 = \Omega$ $\mathcal{H}$ universelles
- orthocomplémenté : $A' = A^c A^\perp$ vérifiant $A \vee A' = 1$ et $A \wedge A' = 0$
- distributif : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (et duale)
- orthomodulaire : $A \leq C : A \vee (A' \wedge C) = C$

Exemple : $\mathcal{F}$ la famille de sous-espaces fermés d'un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable

Probabilités classiques non-commutatives

Mesure $\mathbb{P}$ sur espace mesurable tribu $(\Omega, \mathcal{F})$

- $\mathcal{F}$ est un treillis σ-complet :
  - ensemble partiellement ordonné (par inclusion) vérifiant

$$A \wedge B = \mathrm{span} A \cup B \in \mathcal{F} \text{ et } A \vee B = A \cap B \in \mathcal{F}$$

    (vraies aussi pour des familles dénombrables)
  - ayant bornes inférieure $0 = \emptyset$ $\{0\}$ et supérieure $1 = \Omega$ $\mathcal{H}$ universelles
- orthocomplémenté : $A' = A^c$ $A^\perp$ vérifiant $A \vee A' = 1$ et $A \wedge A' = 0$
- distributif : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (et duale)
- orthomodulaire : $A \leq C : A \vee (A' \wedge C) = C$

Exemple : $\mathcal{F}$ la famille de sous-espaces fermés d'un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable

Mesure $\mathbb{P}$ sur espace mesurable tribu $(\Omega, \mathcal{F})$

- $\mathcal{F}$ est un treillis σ-complet :
  - ensemble partiellement ordonné (par inclusion) vérifiant

$$A \wedge B = \mathrm{span} A \cup B \in \mathcal{F} \text{ et } A \vee B = A \cap B \in \mathcal{F}$$

(vraies aussi pour des familles dénombrables)

  - ayant bornes inférieure $0 = \emptyset$ $\{0\}$ et supérieure $1 = \Omega$ $\mathcal{H}$ universelles
- orthocomplémenté : $A' = A^c$ $A^\perp$ vérifiant $A \vee A' = 1$ et $A \wedge A' = 0$
- distributif : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (et duale)
- orthomodulaire : $A \leq C : A \vee (A' \wedge C) = C$

Exemple : $\mathcal{F}$ la famille de sous-espaces fermés d'un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable

Mesure $\mathbb{P}$ sur espace mesurable tribu $(\Omega, \mathcal{F})$

- $\mathcal{F}$ est un treillis σ-complet :
  - ensemble partiellement ordonné (par inclusion) vérifiant

$$A \wedge B = \mathrm{span} A \cup B \in \mathcal{F} \text{ et } A \vee B = A \cap B \in \mathcal{F}$$

  (vraies aussi pour des familles dénombrables)
  - ayant bornes inférieure $0 = \emptyset$ $\{0\}$ et supérieure $1 = \Omega$ $\mathcal{H}$ universelles
- orthocomplémenté : $A' = A^c A^\perp$ vérifiant $A \vee A' = 1$ et $A \wedge A' = 0$
- distributif : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (et duale)
- orthomodulaire : $A \leq C : A \vee (A' \wedge C) = C$

Exemple : $\mathcal{F}$ la famille de sous-espaces fermés d'un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable

Probabilités classiques non-commutatives

Mesure $\mathbb{P}$ sur espace mesurable tribu $(\Omega, \mathcal{F})$

- $\mathcal{F}$ est un treillis σ-complet :
  - ensemble partiellement ordonné (par inclusion) vérifiant

$$A \wedge B = \mathrm{span} A \cup B \in \mathcal{F} \text{ et } A \vee B = A \cap B \in \mathcal{F}$$

(vraies aussi pour des familles dénombrables)

  - ayant bornes inférieure $0 = \emptyset \ \{\mathbf{0}\}$ et supérieure $1 = \Omega \ \mathcal{H}$ universelles
- orthocomplémenté : $A' = A^c \ A^\perp$ vérifiant $A \vee A' = 1$ et $A \wedge A' = 0$
- distributif : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (et duale)
- orthomodulaire : $A \leq C : A \vee (A' \wedge C) = C$

Exemple : $\mathcal{F}$ la famille de sous-espaces fermés d'un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable

Mesure $\mathbb{P}$ sur espace mesurable tribu $(\Omega, \mathcal{F})$

- $\mathcal{F}$ est un treillis σ-complet :
  - ensemble partiellement ordonné (par inclusion) vérifiant

$$A \wedge B = \mathrm{span} A \cup B \in \mathcal{F} \text{ et } A \vee B = A \cap B \in \mathcal{F}$$

  (vraies aussi pour des familles dénombrables)
  - ayant bornes inférieure $0 = \emptyset\ \{0\}$ et supérieure $1 = \Omega\ \mathcal{H}$ universelles
- orthocomplémenté : $A' = A^c\ A^\perp$ vérifiant $A \vee A' = 1$ et $A \wedge A' = 0$
- distributif : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (et duale)
- orthomodulaire : $A \leq C : A \vee (A' \wedge C) = C$

Exemple : $\mathcal{F}$ la famille de sous-espaces fermés d'un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable

Mesure $\mathbb{P}$ sur espace mesurable tribu $(\Omega, \mathcal{F})$

- $\mathcal{F}$ est un treillis σ-complet :
  - ensemble partiellement ordonné (par inclusion) vérifiant

$$A \wedge B = \text{span} A \cup B \in \mathcal{F} \text{ et } A \vee B = A \cap B \in \mathcal{F}$$

(vraies aussi pour des familles dénombrables)

  - ayant bornes inférieure $0 = \emptyset \; \{\mathbf{0}\}$ et supérieure $1 = \Omega \; \mathcal{H}$ universelles
- orthocomplémenté : $A' = A^c \, A^\perp$ vérifiant $A \vee A' = 1$ et $A \wedge A' = 0$
- distributif : $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (et duale)
- orthomodulaire : $A \leq C : A \vee (A' \wedge C) = C$

Exemple : $\mathcal{F}$ la famille de sous-espaces fermés d'un Hilbert $\mathcal{H}$ séparable

Variables aléatoires (bornées)

- Classiques : Non-commutatives : Exemple

$$\mathfrak{A} = L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}) \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

- $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre non- commutative.
  - de Banach (unifère)
  - involutive $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$
  - vérifiant $\|X^*X\| = \|X\|^2$ pour tout $X \in \mathfrak{A}$
  - non-commutative $XY = \neq YX$

Variables aléatoires (bornées)

- Classiques : Non-commutatives : Exemple

$$\mathfrak{A} = L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C})\mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

- $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre non- commutative.
  - de Banach (unifère)
  - involutive $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$
  - vérifiant $\|X^*X\| = \|X\|^2$ pour tout $X \in \mathfrak{A}$
  - non-commutative $XY = \neq YX$

Variables aléatoires (bornées)

- Classiques : Non-commutatives : Exemple

$$\mathfrak{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}) \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

- $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre non- commutative.
  - de Banach (unifère)
  - involutive $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$
  - vérifiant $\|X^*X\| = \|X\|^2$ pour tout $X \in \mathfrak{A}$
  - non-commutative $XY = \neq YX$

Variables aléatoires (bornées)

- Classiques : Non-commutatives : Exemple

$$\mathfrak{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}) \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

- $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre non- commutative.
  - de Banach (unifère)
  - involutive $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$
  - vérifiant $\|X^*X\| = \|X\|^2$ pour tout $X \in \mathfrak{A}$
  - non-commutative $XY = \neq YX$

- Classiques : Non-commutatives : Exemple

$$\mathfrak{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}) \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

- $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre non- commutative.
  - de Banach (unifère)
  - involutive $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$
  - vérifiant $\|X^*X\| = \|X\|^2$ pour tout $X \in \mathfrak{A}$
  - non-commutative $XY = \neq YX$

Variables aléatoires (bornées)

- Classiques : Non-commutatives : Exemple

$$\mathfrak{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}) \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

- $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre non- commutative.
  - de Banach (unifère)
  - involutive $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$
  - vérifiant $\|X^*X\| = \|X\|^2$ pour tout $X \in \mathfrak{A}$
  - non-commutative $XY = \neq YX$

Variables aléatoires (bornées)

- Classiques : Non-commutatives : Exemple

$$\mathfrak{A} = L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}) \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

- $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre non- commutative.
    - de Banach (unifère)
    - involutive $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$
    - vérifiant $\|X^*X\| = \|X\|^2$ pour tout $X \in \mathfrak{A}$
    - non-commutative $XY = \neq YX$

Variables aléatoires (bornées)

- Classiques : Non-commutatives : Exemple

$$\mathfrak{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C}) \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

- $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre non- commutative.
  - de Banach (unifère)
  - involutive $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$
  - vérifiant $\|X^*X\| = \|X\|^2$ pour tout $X \in \mathfrak{A}$
  - non-commutative $XY = \neq YX$

Variables aléatoires (bornées)

- Classiques : Non-commutatives : Exemple

$$\mathfrak{A} = L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{C})\mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

- $\mathfrak{A}$ est une C^*-algèbre non- commutative.
  - de Banach (unifère)
  - involutive $* : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$
  - vérifiant $\|X^*X\| = \|X\|^2$ pour tout $X \in \mathfrak{A}$
  - non-commutative $XY = \neq YX$

Applications

- Fondamentales
  - Probabilités classiques $\Leftrightarrow$ Mécanique statistique classique
  - Probabilités non-commutatives $\Leftrightarrow$ Mécanique (statistique) quantique
- (Pré-)industrielles
  - Nanotechnologie
  - Cryptographie quantique (fibres optiques 150km)
  - Communication quantique (atmosphère dense 10km)
  - ... Ordinateur quantique (dans 10–15 ans)

Applications

- Fondamentales
  - Probabilités classiques $\Leftrightarrow$ Mécanique statistique classique
  - Probabilités non-commutatives $\Leftrightarrow$ Mécanique (statistique) quantique
- (Pré-)industrielles
  - Nanotechnologie
  - Cryptographie quantique (fibres optiques 150km)
  - Communication quantique (atmosphère dense 10km)
  - ... Ordinateur quantique (dans 10–15 ans)

Applications

- Fondamentales
  - Probabilités classiques $\Leftrightarrow$ Mécanique statistique classique
  - Probabilités non-commutatives $\Leftrightarrow$ Mécanique (statistique) quantique
- (Pré-)industrielles
  - Nanotechnologie
  - Cryptographie quantique (fibres optiques 150km)
  - Communication quantique (atmosphère dense 10km)
  - . . . Ordinateur quantique (dans 10–15 ans)

Applications

- Fondamentales
  - Probabilités classiques $\Leftrightarrow$ Mécanique statistique classique
  - Probabilités non-commutatives $\Leftrightarrow$ Mécanique (statistique) quantique
- (Pré-)industrielles
  - Nanotechnologie
  - Cryptographie quantique (fibres optiques 150km)
  - Communication quantique (atmosphère dense 10km)
  - ... Ordinateur quantique (dans 10–15 ans)

- Fondamentales
  - Probabilités classiques $\Leftrightarrow$ Mécanique statistique classique
  - Probabilités non-commutatives $\Leftrightarrow$ Mécanique (statistique) quantique
- (Pré-)industrielles
  - Nanotechnologie
  - Cryptographie quantique (fibres optiques 150km)
  - Communication quantique (atmosphère dense 10km)
  - . . . Ordinateur quantique (dans 10–15 ans)

Applications

- Fondamentales
  - Probabilités classiques $\Leftrightarrow$ Mécanique statistique classique
  - Probabilités non-commutatives $\Leftrightarrow$ Mécanique (statistique) quantique
- (Pré-)industrielles
  - Nanotechnologie
  - Cryptographie quantique (fibres optiques 150km)
  - Communication quantique (atmosphère dense 10km)
  - . . . Ordinateur quantique (dans 10–15 ans)

Applications

- Fondamentales
  - Probabilités classiques $\Leftrightarrow$ Mécanique statistique classique
  - Probabilités non-commutatives $\Leftrightarrow$ Mécanique (statistique) quantique
- (Pré-)industrielles
  - Nanotechnologie
  - Cryptographie quantique (fibres optiques 150km)
  - Communication quantique (atmosphère dense 10km)
  - ... Ordinateur quantique (dans 10–15 ans)

Applications

- Fondamentales
  - Probabilités classiques $\Leftrightarrow$ Mécanique statistique classique
  - Probabilités non-commutatives $\Leftrightarrow$ Mécanique (statistique) quantique
- (Pré-)industrielles
  - Nanotechnologie
  - Cryptographie quantique (fibres optiques 150km)
  - Communication quantique (atmosphère dense 10km)
  - . . . Ordinateur quantique (dans 10–15 ans)