

Autour d'une technique de rééchantillonnage non paramétrique pour les champs aléatoires.

Lionel Truquet,
lionel.truquet@ensae.fr

1 Rééchantillonnage et synthèse de textures

- Principe
- L' Algorithme de Efros et Leung
- Autre exemple de rééchantillonnage (Bickel et Levina (2006))
- Des résultats de consistance

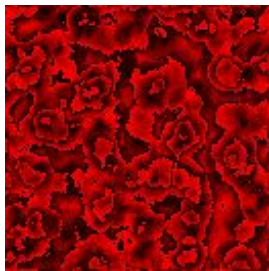
2 Méthodes non causales

- Extension de la méthode de Bickel et Levina
- Des calculs de vitesse
- Autre algorithme non causal (Paget et Longstaff (1998))

3 Simulation de textures

Les textures

Ce sont des images pouvant être modélisées par un champ aléatoire stationnaire. On cherche à reproduire ces formes en augmentant le nombre de pixels: **produire une image plus grande.**



L'image est souvent associée à une réalisation $\{x_t/1 \leq t_1 \leq T_1, 1 \leq t_2 \leq T_2\}$ d'un champ Markovien. x_t = intensité d'un pixel.

Synthèse par champs de Markov

1. On estime la loi conditionnelle d'un pixel sachant ses voisins.
2. On simule une nouvelle texture à l'aide de cette loi conditionnelle.

Algorithme de Efros et Leung (1999)

Soit $\{x_t/1 \leq t_1 \leq T_1, 1 \leq t_2 \leq T_2\}$ une texture observée réalisation d'un champ Markovien. $x_t =$ intensité d'un pixel.

Algorithme de Efros et Leung (1999)

Soit $\{x_t/1 \leq t_1 \leq T_1, 1 \leq t_2 \leq T_2\}$ une texture observée réalisation d'un champ Markovien. $x_t =$ intensité d'un pixel.

Principe

1) On "colle" un petit morceau de l'image observée au centre de la nouvelle.

Algorithme de Efros et Leung (1999)

Soit $\{x_t/1 \leq t_1 \leq T_1, 1 \leq t_2 \leq T_2\}$ une texture observée réalisation d'un champ Markovien. x_t = intensité d'un pixel.

Principe

- 1) On "colle" un petit morceau de l'image observée au centre de la nouvelle.
- 2) Synthèse en spirales: soit x_t^* à synthétiser, $O(x_t^*)$ = partie du voisinage markovien de t qui vient d'être synthétisée.

Algorithme de Efros et Leung (1999)

Soit $\{x_t/1 \leq t_1 \leq T_1, 1 \leq t_2 \leq T_2\}$ une texture observée réalisation d'un champ Markovien. $x_t =$ intensité d'un pixel.

Principe

- 1) On "colle" un petit morceau de l'image observée au centre de la nouvelle.
- 2) Synthèse en spirales: soit x_t^* à synthétiser, $O(x_t^*) =$ partie du voisinage markovien de t qui vient d'être synthétisée.

→ On calcule $d(O(x_s), O(x_t^*)), \forall x_s$

Algorithme de Efros et Leung (1999)

Soit $\{x_t/1 \leq t_1 \leq T_1, 1 \leq t_2 \leq T_2\}$ une texture observée réalisation d'un champ Markovien. $x_t =$ intensité d'un pixel.

Principe

- 1) On "colle" un petit morceau de l'image observée au centre de la nouvelle.
- 2) Synthèse en spirales: soit x_t^* à synthétiser, $O(x_t^*) =$ partie du voisinage markovien de t qui vient d'être synthétisée.

→ On calcule $d(O(x_s), O(x_t^*))$, $\forall x_s$

d distance euclidienne pondérée .

$O(x_s)$ et $O(x_t^*)$ ont même forme et même cardinal

Algorithme de Efros et Leung (1999)

Soit $\{x_t/1 \leq t_1 \leq T_1, 1 \leq t_2 \leq T_2\}$ une texture observée réalisation d'un champ Markovien. $x_t =$ intensité d'un pixel.

Principe

- 1) On "colle" un petit morceau de l'image observée au centre de la nouvelle.
- 2) Synthèse en spirales: soit x_t^* à synthétiser, $O(x_t^*) =$ partie du voisinage markovien de t qui vient d'être synthétisée.

→ On calcule $d(O(x_s), O(x_t^*))$, $\forall x_s$

d distance euclidienne pondérée .

$O(x_s)$ et $O(x_t^*)$ ont même forme et même cardinal

→ On tire x_t^* dans S , aléatoirement de façon uniforme :

$$S = \left\{ x_s / d(O(x_s), O(x_t^*)) \leq (1 + \varepsilon) \min_s d(O(x_s), O(x_t^*)) \right\}$$

Algorithme de Efros et Leung (1999)

Soit $\{x_t/1 \leq t_1 \leq T_1, 1 \leq t_2 \leq T_2\}$ une texture observée réalisation d'un champ Markovien. $x_t =$ intensité d'un pixel.

Principe

- 1) On "colle" un petit morceau de l'image observée au centre de la nouvelle.
- 2) Synthèse en spirales: soit x_t^* à synthétiser, $O(x_t^*) =$ partie du voisinage markovien de t qui vient d'être synthétisée.

→ On calcule $d(O(x_s), O(x_t^*))$, $\forall x_s$

d distance euclidienne pondérée .

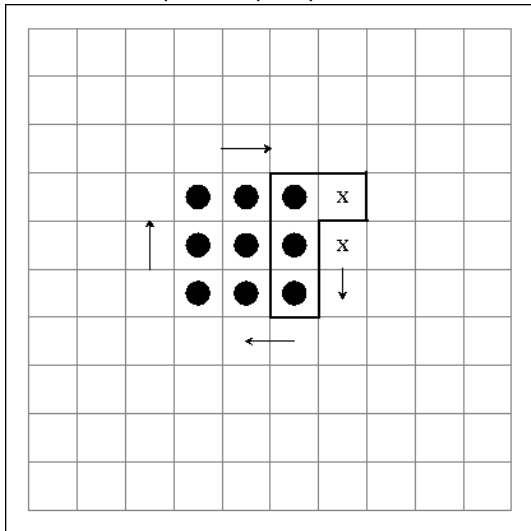
$O(x_s)$ et $O(x_t^*)$ ont même forme et même cardinal

→ On tire x_t^* dans S , aléatoirement de façon uniforme :

$$S = \left\{ x_s / d(O(x_s), O(x_t^*)) \leq (1 + \varepsilon) \min_s d(O(x_s), O(x_t^*)) \right\}$$

Efros et Leung prennent $\varepsilon = 0.1$.

Pour un champ aux 8 plus proches voisins:



Algorithme de Bickel et Levina (2006)

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ un champ aléatoire réel stationnaire observé sur un rectangle I et $Y_t = (X_{t-j})_{j \in A}$, $A \subset \mathbb{Z}^2$ finie.

Algorithme de Bickel et Levina (2006)

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ un champ aléatoire réel stationnaire observé sur un rectangle I et $Y_t = (X_{t-j})_{j \in A}$, $A \subset \mathbb{Z}^2$ finie.

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_t \leq x} / Y_t = y) = \int_{-\infty}^x f_{X/Y}(u/y) du$$

est estimée par

$$\frac{1}{Z} \sum_{t \in I_T} \mathbb{1}_{X_t \leq x} W_b(y - Y_t), \quad Z = \sum_{t \in I_T} W_b(y - Y_t).$$

où: W noyau, $W_b = b^{-\nu} W(\cdot/b)$, $\nu = \text{dimension de } Y_t$,
et

$$I_T = \{t \in I / (X_t, Y_t) \in I\}$$

Algorithme de Bickel et Levina (2006)

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$ un champ aléatoire réel stationnaire observé sur un rectangle I et $Y_t = (X_{t-j})_{j \in A}$, $A \subset \mathbb{Z}^2$ finie.

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_t \leq x} / Y_t = y) = \int_{-\infty}^x f_{X/Y}(u/y) du$$

est estimée par

$$\frac{1}{Z} \sum_{t \in I_T} \mathbb{1}_{X_t \leq x} W_b(y - Y_t), \quad Z = \sum_{t \in I_T} W_b(y - Y_t).$$

où: W noyau, $W_b = b^{-\nu} W(\cdot/b)$, $\nu = \text{dimension de } Y_t$,
et

$$I_T = \{t \in I / (X_t, Y_t) \in I\}$$

→ La loi $F_{X/Y}(dx/y)$ est estimée par:

$$F_{X/Y}^*(dx/y) = \frac{1}{Z} \sum_{t \in I_T} W_b(y - Y_t) \delta_{X_t}(dx)$$

Principe du Bootstrapp

Pour générer une texture sur $I^* = (X_t^*)_{1 \leq t_1, t_2 \leq m_1, m_2}$ à partir de $I = (X_t)_{1 \leq t_1, t_2 \leq k_1, k_2}$,

Principe du Bootstrapp

Pour générer une texture sur $I^* = (X_t^*)_{1 \leq t_1, t_2 \leq m_1, m_2}$ à partir de $I = (X_t)_{1 \leq t_1, t_2 \leq k_1, k_2}$,

1. Pour un entier p fixé, on choisit uniformément un bloc $\{X_t^* : 1 \leq t_1 \leq p, 1 \leq t_2 \leq p\}$ dans I .

Principe du Bootstrapp

Pour générer une texture sur $I^* = (X_t^*)_{1 \leq t_1, t_2 \leq m_1, m_2}$ à partir de $I = (X_t)_{1 \leq t_1, t_2 \leq k_1, k_2}$,

1. Pour un entier p fixé, on choisit uniformément un bloc $\{X_t^* : 1 \leq t_1 \leq p, 1 \leq t_2 \leq p\}$ dans I .

2. Supposons que X_t^* a été généré pour $\{t : t_1 < u_1\} \cup \{t : t_1 = u, t_2 < u_2\}$. Soit N une variable discrète telle que

$$\mathbb{P}(N = s) = \frac{1}{Z} W_b(Y_u^* - Y_s),$$

où $Y_u^* = (X_{u-j}^*)_{1 \leq j_1, j_2 \leq p}$ et $Y_s = (X_{s-j})_{1 \leq j_1, j_2 \leq p}$. On tronque au bord si nécessaire.

Principe du Bootstrapp

Pour générer une texture sur $I^* = (X_t^*)_{1 \leq t_1, t_2 \leq m_1, m_2}$ à partir de $I = (X_t)_{1 \leq t_1, t_2 \leq k_1, k_2}$,

1. Pour un entier p fixé, on choisit uniformément un bloc $\{X_t^* : 1 \leq t_1 \leq p, 1 \leq t_2 \leq p\}$ dans I .

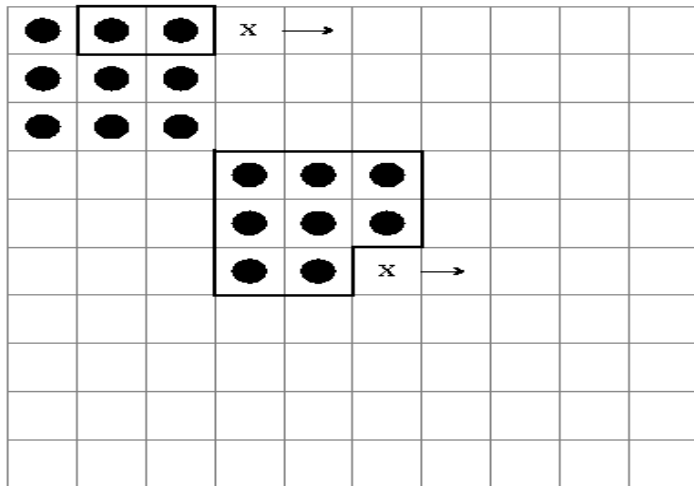
2. Supposons que X_t^* a été généré pour $\{t : t_1 < u_1\} \cup \{t : t_1 = u, t_2 < u_2\}$. Soit N une variable discrète telle que

$$\mathbb{P}(N = s) = \frac{1}{Z} W_b(Y_u^* - Y_s),$$

où $Y_u^* = (X_{u-j}^*)_{1 \leq j_1, j_2 \leq p}$ et $Y_s = (X_{s-j})_{1 \leq j_1, j_2 \leq p}$. On tronque au bord si nécessaire.

3. On pose $X_u^* = X_N$.

Exemple avec $p = 2$



Hypothèse d'unilatéralité

Le champ $(X_t)_{1 \leq t_1, t_2}$ est supposé **unilatéral** (ou de Pickard) :

$$\mathbb{P}(X_t / X_{W_t}) = \mathbb{P}(X_t / X_{U_t}),$$

$$U_t = \{u : \max(1, t_1 - p + 1) \leq u_1 \leq t_1, \max(1, t_2 - p + 1) \leq u_2 \leq t_2, u \neq t\}$$

le carré de côté p en haut à gauche de t ,

$$W_t = \{u : 1 \leq u_1 \leq t_1, 1 \leq u_2 \leq t_2, u \neq t\}$$

tous les indices au dessus et à gauche de t .

Hypothèse d'unilatéralité

Le champ $(X_t)_{1 \leq t_1, t_2}$ est supposé **unilatéral** (ou de Pickard) :

$$\mathbb{P}(X_t/X_{W_t}) = \mathbb{P}(X_t/X_{U_t}),$$

$$U_t = \{u : \max(1, t_1 - p + 1) \leq u_1 \leq t_1, \max(1, t_2 - p + 1) \leq u_2 \leq t_2, u \neq t\}$$

le carré de côté p en haut à gauche de t ,

$$W_t = \{u : 1 \leq u_1 \leq t_1, 1 \leq u_2 \leq t_2, u \neq t\}$$

tous les indices au dessus et à gauche de t .

→ Ces cas particuliers de champ de Markov:

1. permettent de reconstruire facilement les lois jointes à partir des lois conditionnelles (analogie avec les chaînes de Markov).
2. approximent bien les textures.

Hypothèses sur la loi

(A1) X est α -mélangeant.

Soit $\alpha_X(k, c) = \sup \{ |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \}$, avec $A \in \sigma(X_E)$, $B \in \sigma(X_F)$, $E, F \subset I$, tels que $d(E, F) \geq k$, $|E| + |F| \leq c$ où $d = \|\cdot\|_\infty$.

Hypothèses sur la loi

(A1) X est α -mélangeant.

Soit $\alpha_X(k, c) = \sup \{ |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \}$, avec $A \in \sigma(X_E)$, $B \in \sigma(X_F)$, $E, F \subset I$, tels que $d(E, F) \geq k$, $|E| + |F| \leq c$ où $d = \|\cdot\|_\infty$.

On suppose (avec $\tau > 2$),

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)^{2c-1} [\alpha_X(k, c)]^{\varepsilon/(c+\varepsilon)} < \infty, \quad c = 2\lceil \tau/2 \rceil, \varepsilon > 0$$

(A2) X_t a un support compact S

$F_{X/Y}$ a une densité continue $f_{X/Y} > 0$ sur $S^{1+\nu}$.

(A3) $\exists L/\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^v, x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$

$$\left| \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(z, y_1) dz - \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(z, y_2) dz \right| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

(A3) $\exists L/\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^v, x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$

$$\left| \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(z, y_1) dz - \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(z, y_2) dz \right| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

(A4) W bornée, Lipschitz, symétrique, positif partout,

$$\int uW(u)du = 0, \int \|u\| W(u)du < \infty, b = \mathcal{O}(T^{-\delta}), T \rightarrow \infty, \delta > 0.$$

Convergence des lois conditionnelles

Theorem

(Bickel, Levina (2006)) Sous les hypothèses (A1), ..., (A4),

$$\sup_{(x,y) \in S^{v+1}} \left| F_{X/Y}^*(x/y) - F_{X/Y}(x/y) \right| \rightarrow_{T \rightarrow \infty} 0$$

$$T = \text{card}\{s / (X_s, Y_s) \in I\}.$$

La propriété d'unilatéralité permet de montrer qu'il en est de même pour les lois jointes.

Extension aux champs non causaux

Soit X un champ markovien non causal tel que
 $\mathcal{L}(X_t/X_t^-) = \mathcal{L}(X_t/X_{t-j}, 0 < \|j\| \leq p) = \mathcal{L}(X_t/Y_t)$.

Principe: Simuler à l'aide de l'échantillonneur de Gibbs une réalisation d'un champ X^* tel que:

$$\mathbb{P}(X_t^* \in dx / Y_t^* = y) = \frac{1}{Z} \sum_{s \in I_T} W_b(y - Y_s) \delta_{X_s}(dx).$$

Extension aux champs non causaux

Soit X un champ markovien non causal tel que
 $\mathcal{L}(X_t/X_t^-) = \mathcal{L}(X_t/X_{t-j}, 0 < \|j\| \leq p) = \mathcal{L}(X_t/Y_t)$.

Principe: Simuler à l'aide de l'échantillonneur de Gibbs une réalisation d'un champ X^* tel que:

$$\mathbb{P}(X_t^* \in dx / Y_t^* = y) = \frac{1}{Z} \sum_{s \in I_T} W_b(y - Y_s) \delta_{X_s}(dx).$$

Theorem

*En l'absence de transition de phase,
 pour toute partie $\{t_1, \dots, t_k\} \subset \mathbb{Z}^2$,*

$$\sup_{x_{t_1}, \dots, x_{t_n} \in S^n} |F^*(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) - F(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})| \rightarrow_{T \rightarrow \infty} 0, \quad p.s.$$

où $F(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_{t_1}, \dots, X_{t_n} \leq x_{t_n})$
 et $F^*(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = \mathbb{P}(X_{t_1}^* \leq x_{t_1}, \dots, X_{t_n}^* \leq x_{t_n})$.

Vitesse des lois conditionnelles

Theorem

Sous les hypothèses de Bickel et Levina,

$$\sup_{(x,y) \in S^{p+1}} \left| F_{X_t/Y_t}^*(x/y) - F_{X_t/Y_t}(x/y) \right| \rightarrow_{T \rightarrow \infty} 0 = O(T^{-\gamma})$$

$$0 < \gamma < \frac{\tau-2}{2(v+1)(\tau+v)} \text{ et } b = O(T^{-\delta}), \delta = \frac{\tau-2}{2(v+1)(\tau+v)}.$$

Vitesse des lois jointes

On suppose:

$$\int_S |F_{X/Y}(x/y) - F_{X/Y}(x/y')| dx \leq \sum_{i \neq 0} L_i |y_i - y'_i|$$

Proposition

Sous les hypothèses de Bickel et Levina et si $\sum_i L_i < 1$, alors pour toute partie $\{t_1, \dots, t_k\} \subset \mathbb{Z}^2$,

$$\sup_{x_{t_1}, \dots, x_{t_n} \in S^n} |F^*(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) - F(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})| = O(T^{-\gamma})$$

$$0 < \gamma < \frac{\tau - 2}{2(v+1)(\tau+v)}.$$

L'approche de Paget et Longstaff (1998)

Simuler un champ aléatoire dont la loi conditionnelle en un site est:

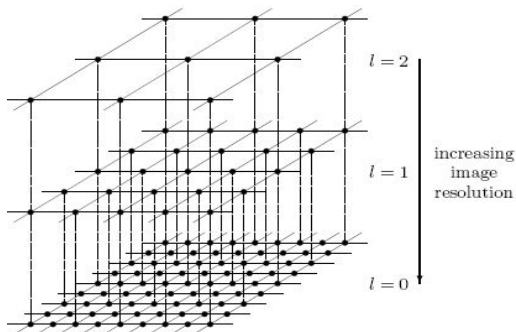
$$\mu(x/y) = \frac{\sum_{s \in I_T} W_b(x - X_s, y - Y_s)}{\sum_{x \in P} \sum_{s \in I_T} W_b(x - X_s, y - Y_s)},$$

où $x \in P = \{\text{ensemble des valeurs des pixels}\}$.

Utilisation de grilles multirésolution

Paget et Longstaff utilise la multirésolution pour éviter:

1. les problèmes de **discontinuités** dans les simulations.
2. un **temps de calcul** trop important surtout si la taille du voisinage est élevé.



On définit différentes grilles pour l'image observée et l'image à synthétiser:

$$S^l = \{s = (2^l i, 2^l j) : 0 \leq i, j < M/2^l\}, \quad l = 0, 1, \dots\}$$

La multirésolution permet de capter les caractéristiques de la texture avec ***p*** petit

→ On simule d'abord la texture sur la grille la moins fine à l'aide la loi conditionnelle μ .

→ On simule d'abord la texture sur la grille la moins fine à l'aide la loi conditionnelle μ .

→ On réinjecte les valeurs simulées sur la grille suivante et on simule les pixels manquants conditionnellement à ces valeurs...

→ On simule d'abord la texture sur la grille la moins fine à l'aide la loi conditionnelle μ .

→ On réinjecte les valeurs simulées sur la grille suivante et on simule les pixels manquants conditionnellement à ces valeurs...

On redéfinit pour chaque grille le voisinage associé:

$$\mathcal{N}_{s=(2^l i, 2^l j)}^l = \{r = (2^l m, 2^l n) \in S^l : d((i, j), (m, n)) \leq p\}$$

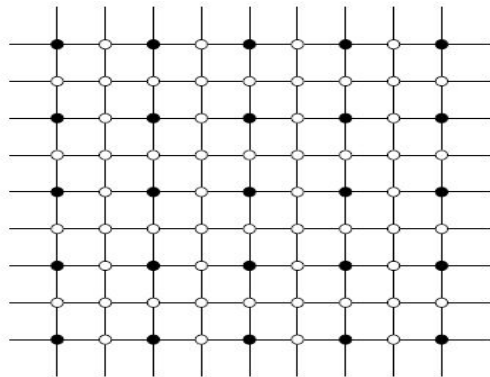
→ On simule d'abord la texture sur la grille la moins fine à l'aide la loi conditionnelle μ .

→ On réinjecte les valeurs simulées sur la grille suivante et on simule les pixels manquants conditionnellement à ces valeurs...

On redéfinit pour chaque grille le voisinage associé:

$$\mathcal{N}_{s=(2^l i, 2^l j)}^l = \{r = (2^l m, 2^l n) \in S^l : d((i, j), (m, n)) \leq p\}$$

⇒ échantillonneur de Gibbs pour chaque résolution.



Les points noirs ont une valeur fixée à la résolution précédente, la simulation concerne les points blancs.

Introduction d'un paramètre de température

A chaque début de nouvelle résolution (sauf à la première), on introduit un indice de confiance pour chaque pixel.

1. On affecte au site r de la résolution d'avant un indice $t_r = 0$.
2. On affecte au site r de la résolution en cours un indice $t_r = 1$.

Introduction d'un paramètre de température

A chaque début de nouvelle résolution (sauf à la première), on introduit un indice de confiance pour chaque pixel.

1. On affecte au site r de la résolution d'avant un indice $t_r = 0$.
2. On affecte au site r de la résolution en cours un indice $t_r = 1$.

Dans la simulation du site r , on remplacera la différence

$y - Y_s$ par $((1 - t_{r-j})(y_{r-j} - Y_{s-j}))_j$

(où $y = (y_{r-j})_j$ et $Y_s = (Y_{s-j})_j$).

Introduction d'un paramètre de température

A chaque début de nouvelle résolution (sauf à la première), on introduit un indice de confiance pour chaque pixel.

1. On affecte au site r de la résolution d'avant un indice $t_r = 0$.
2. On affecte au site r de la résolution en cours un indice $t_r = 1$.

Dans la simulation du site r , on remplacera la différence

$y - Y_s$ par $((1 - t_{r-j})(y_{r-j} - Y_{s-j}))_j$

(où $y = (y_{r-j})_j$ et $Y_s = (Y_{s-j})_j$).

Après chaque synthèse, on remplace t_r par $\max\left(0, \frac{\xi + \sum_{j \in \mathcal{N}_r} t_{r-j}}{|\mathcal{N}_r|}\right)$

où $\xi < 0$ est fixée par l'utilisateur ($\mathcal{N}_r = \{j/0 < \|j\| \leq p\}$).

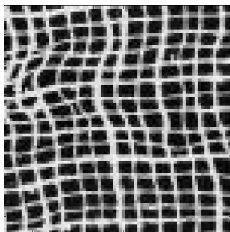
Lorsque $t_s = 0 \quad \forall s$, on passe à la résolution suivante.

Simulations: paramètres

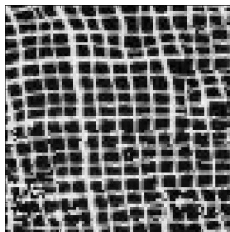
taille du voisinage: $p = 3$ ou 4 avec la multirésolution.

largeur de fenêtre: $b = 0.01 * (\text{taille voisinage})^{1/2}$.

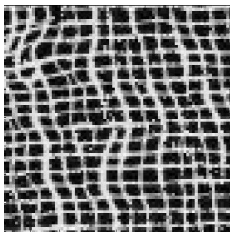
bordure: on tronque en utilisant la partie visible du voisinage Markovien.



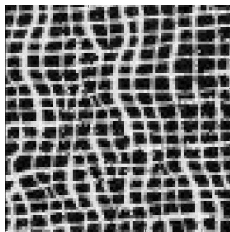
Original



Bickel et Levina



Multirésolution ICM



Mutirésolution



Synthese sur 4 niveaux, $p = 3$, $b = 0.01$, $\xi = -1$



Original



ICM Multirésolution



Wei et Levoy (1999)



Original



ICM Multirésolution



Wei et Levoy Multirésolution

..

