ELAGAGE D'UN ARBRE ALEATOIRE CONTINU DE LEVY

G.Voisin

Université d'Orléans

28/08/08

Romain ABRAHAM, Jean-François DELMAS et Guillaume VOISIN.
Pruning a Lévy continuum random tree.
prépublication 2008.

Définition

Un processus de branchement à espace d'états continu (CSBP) est un processus de Markov $(Y_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ tel que

$$Y_t^{x+y} \overset{(d)}{=} Y_t^x + \tilde{Y}_t^y \qquad \textit{avec} \;\; Y \perp \tilde{Y}$$

Théorème (Lamperti 1967)

Il existe $\gamma_p \to +\infty$ et un processus de Galton-Watson Y^p avec $Y_o^p = p$ tels que

$$\left(\frac{1}{p} Y^p_{[\gamma_p t]}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y_t)_{t\geq 0}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda Y_t}\right] = e^{-x u_t(\lambda)}$$

où u_t est l'unique solution positive de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\psi(u) \text{ avec } u_0(\lambda) = \lambda$$

Définition

Un processus de branchement à espace d'états continu (CSBP) est un processus de Markov $(Y_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ tel que

$$Y_t^{x+y} \overset{(d)}{=} Y_t^x + \tilde{Y}_t^y \qquad avec \;\; Y \perp \tilde{Y}$$

Théorème (Lamperti 1967)

Il existe $\gamma_p \to +\infty$ et un processus de Galton-Watson Y^p avec $Y_o^p = p$ tels que

$$\left(\frac{1}{p} Y^p_{[\gamma_p t]}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y_t)_{t\geq 0}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda Y_t}\right] = e^{-x u_t(\lambda)}$$

où u_t est l'unique solution positive de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\psi(u) \text{ avec } u_0(\lambda) = \lambda$$

Définition

Un processus de branchement à espace d'états continu (CSBP) est un processus de Markov $(Y_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ tel que

$$Y_t^{x+y} \overset{(d)}{=} Y_t^x + \tilde{Y}_t^y \qquad avec \;\; Y \perp \tilde{Y}$$

Théorème (Lamperti 1967)

Il existe $\gamma_p \to +\infty$ et un processus de Galton-Watson Y^p avec $Y_o^p = p$ tels que

$$\left(\frac{1}{p} Y^p_{[\gamma_p t]}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} (Y_t)_{t\geq 0}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda Y_t}\right] = e^{-x u_t(\lambda)}$$

où u_t est l'unique solution positive de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\psi(u) \text{ avec } u_0(\lambda) = \lambda$$

On considère un CSBP critique ou sous-critique de mécanisme de branchement

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \left(e^{-\lambda l} - 1 + \lambda l\right) \pi(dl)$$

avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, π mesure de Lévy σ-finie sur $]0, +\infty[$, positive telle que $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} (1 \wedge l^2)\pi(dl) < +\infty$.

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_t}\right] = e^{t\psi(\lambda)}$$

On suppose aussi :

$$\int_{]0,+\infty[} (l \wedge l^2)\pi(dl) < +\infty$$

$$\beta > 0 \qquad ou \qquad \int_{]0,1[} l\pi(dl) = +\infty$$

On considère un CSBP critique ou sous-critique de mécanisme de branchement

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \left(e^{-\lambda l} - 1 + \lambda l\right) \pi(dl)$$

avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, π mesure de Lévy σ-finie sur $]0, +\infty[$, positive telle que $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} (1 \wedge l^2)\pi(dl) < +\infty$.

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_t}\right] = e^{t\psi(\lambda)}$$

On suppose aussi :

$$\int_{]0,+\infty[} (l \wedge l^2)\pi(dl) < +\infty$$

$$\beta > 0 \qquad ou \qquad \int_{]0,1[} l\pi(dl) = +\infty$$

On considère un CSBP critique ou sous-critique de mécanisme de branchement

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \left(e^{-\lambda l} - 1 + \lambda l\right) \pi(dl)$$

avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, π mesure de Lévy σ-finie sur $]0, +\infty[$, positive telle que $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} (1 \wedge l^2)\pi(dl) < +\infty$.

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_t}\right] = e^{t\psi(\lambda)}$$

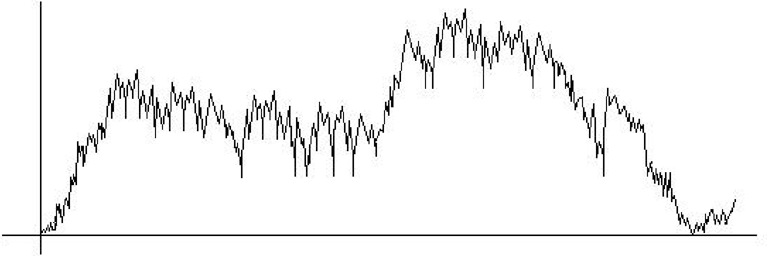
On suppose aussi :

$$\int_{]0,+\infty[} (l \wedge l^2)\pi(dl) < +\infty$$

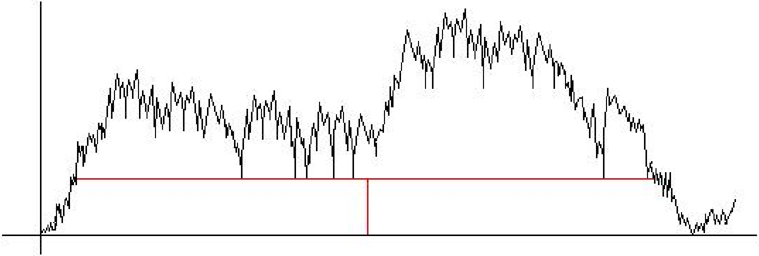
$$\beta > 0 \qquad ou \qquad \int_{]0,1[} l\pi(dl) = +\infty$$

Le processus des hauteurs $(H_t)_{t\geq 0}$ représente la génération de l'individu t dans l'arbre aléatoire continu (CRT).

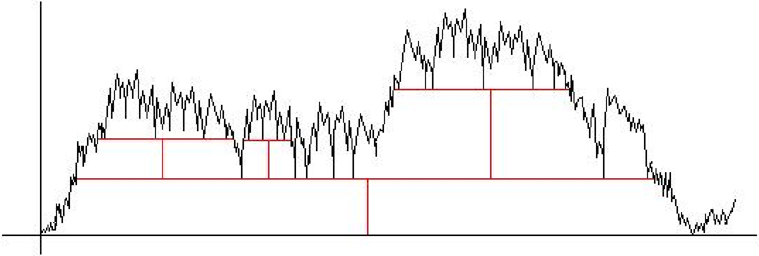
Le processus des hauteurs $(H_t)_{t\geq 0}$ représente la génération de l'individu t dans l'arbre aléatoire continu (CRT).



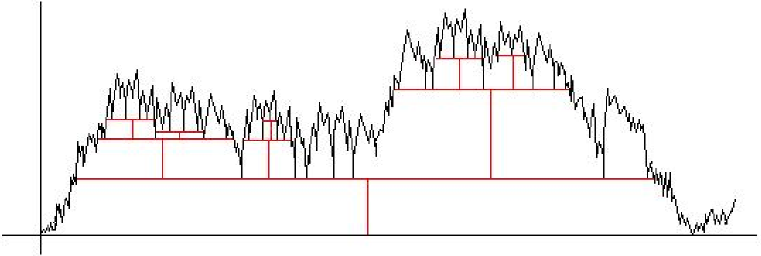
Le processus des hauteurs $(H_t)_{t\geq 0}$ représente la génération de l'individu t dans l'arbre aléatoire continu (CRT).



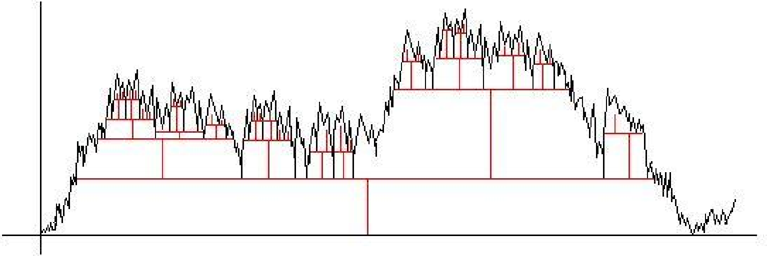
Le processus des hauteurs $(H_t)_{t\geq 0}$ représente la génération de l'individu t dans l'arbre aléatoire continu (CRT).



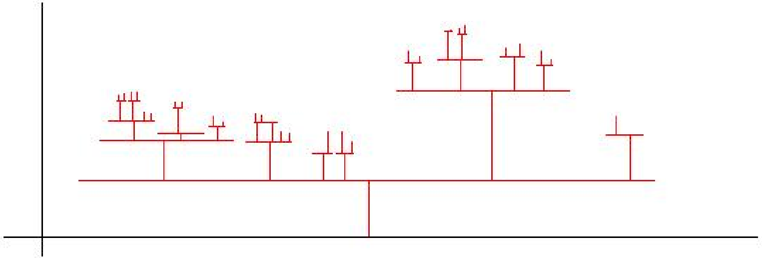
Le processus des hauteurs $(H_t)_{t \geq 0}$ représente la génération de l'individu t dans l'arbre aléatoire continu (CRT).



Le processus des hauteurs $(H_t)_{t \geq 0}$ représente la génération de l'individu t dans l'arbre aléatoire continu (CRT).



Le processus des hauteurs $(H_t)_{t\geq 0}$ représente la génération de l'individu t dans l'arbre aléatoire continu (CRT).



Définition

Processus d'exploration ρ à valeurs dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ défini par :

$$\rho_t(dr) = \beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(r)dr + \sum_{\substack{0 \le s \le t \\ X_{s-} < I_t^s}} (I_t^s - X_{s-})\,\delta_{H_s}(dr)$$

Avec $I_t^s = \inf_{u \in [s,t]} X_u$.

Propriétés

- ρ est à trajectoires càd-làg
- ρ est Markov fort
- $\langle \rho_t, 1 \rangle = X_t - I_t$
- $Supp(\rho_t) = [0, H_t]$

Définition

Processus d'exploration ρ à valeurs dans $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}_+)$ défini par :

$$\rho_t(dr) = \beta \mathbf{1}_{[0,H_t]}(r)dr + \sum_{\substack{0\leq s\leq t \\ X_{s-}<I_t^s}} (I_t^s - X_{s-})\,\delta_{H_s}(dr)$$

Avec $I_t^s = \inf_{u\in[s,t]} X_u$.

Propriétés

- ρ est à trajectoires càd-làg
- ρ est Markov fort
- $\langle \rho_t, 1\rangle = X_t - I_t$
- $Supp(\rho_t) = [0, H_t]$

Elagage d'un arbre continu

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \left(e^{-\lambda l} - 1 + \lambda l\right) \pi(dl)$$

$$\downarrow$$

$$\psi_0(\lambda) = \alpha_0\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \left(e^{-\lambda l} - 1 + \lambda l\right) \pi_0(dl)$$

tel que

- il existe une mesure π_1 σ-finie positive sur $]0, +\infty[$ telle que $\int_{]0,+\infty[} l\pi_1(dl) < +\infty$ et

$$\pi = \pi_0 + \pi_1$$

- $\alpha_1 := \alpha_0 - \alpha - \int_{]0,+\infty[} l\pi_1(dl) \geq 0$

Elagage d'un arbre continu

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \left(e^{-\lambda l} - 1 + \lambda l\right) \pi(dl)$$

$$\downarrow$$

$$\psi_0(\lambda) = \alpha_0\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \left(e^{-\lambda l} - 1 + \lambda l\right) \pi_0(dl)$$

tel que

- il existe une mesure π_1 σ-finie positive sur $]0,+\infty[$ telle que $\int_{]0,+\infty[} l\pi_1(dl) < +\infty$ et

$$\pi = \pi_0 + \pi_1$$

- $\alpha_1 := \alpha_0 - \alpha - \int_{]0,+\infty[} l\pi_1(dl) \geq 0$

Elagage d'un arbre continu

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \left(e^{-\lambda l} - 1 + \lambda l\right) \pi(dl)$$

$$\downarrow$$

$$\psi_0(\lambda) = \alpha_0\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \left(e^{-\lambda l} - 1 + \lambda l\right) \pi_0(dl)$$

tel que

- il existe une mesure π_1 σ-finie positive sur $]0, +\infty[$ telle que $\int_{]0,+\infty[} l\pi_1(dl) < +\infty$ et

$$\pi = \pi_0 + \pi_1$$

- $$\alpha_1 := \alpha_0 - \alpha - \int_{]0,+\infty[} l\pi_1(dl) \geq 0$$

$$X = X^0 + X^1$$

avec

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_t^0}\right] = e^{t\psi_0(\lambda)}$$

$$\psi_0(\lambda) = \alpha_0\lambda + \beta\lambda^2 + \int_{]0,+\infty[} \left(e^{-\lambda l} - 1 + \lambda l\right) \pi_0(dl) \ , \ \alpha_0 \geq 0$$

et

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_t^1}\right] = e^{-t\phi_1(\lambda)}$$

$$\phi_1(\lambda) = \alpha_1\lambda + \int_{]0,+\infty[} \left(1 - e^{-\lambda l}\right) \pi_1(dl) \ , \qquad \alpha_1 \geq 0$$

Marques sur les nœuds

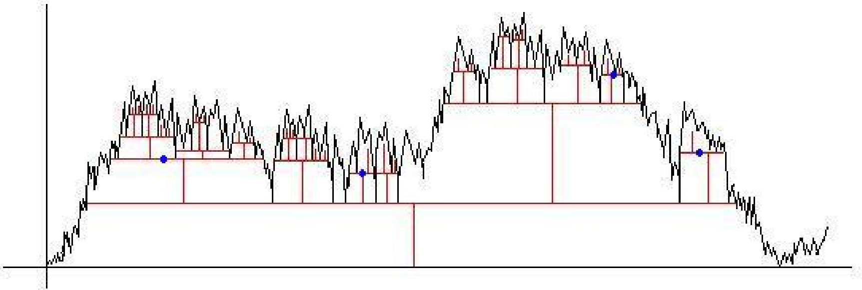
$$m_t^{nod}(dr) = \sum_{\substack{s\in\mathcal{J}_1 \\ 0\leq s\leq t}} (I_t^s - X_{s-})\,\delta_{H_s}(dr)$$

avec $\mathcal{J}_1$ l'ensemble des temps de sauts de X^1.

Marques sur les nœuds

$$m_t^{nod}(dr) = \sum_{\substack{s \in \mathcal{J}_1 \\ 0 \le s \le t}} (I_t^s - X_{s-})\, \delta_{H_s}(dr)$$

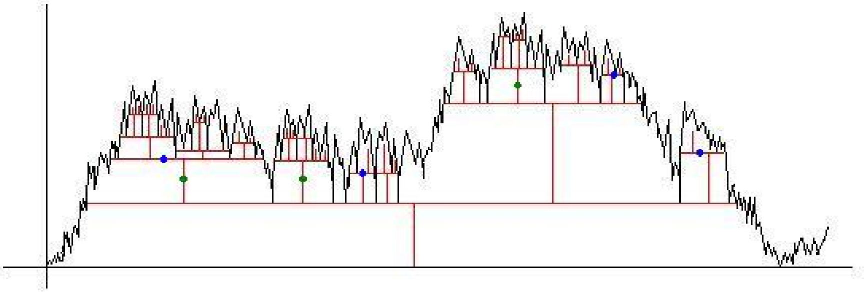
avec $\mathcal{J}_1$ l'ensemble des temps de sauts de X^1.



Marques sur les nœuds

$$m_t^{nod}(dr) = \sum_{\substack{s \in \mathcal{J}_1 \\ 0 \le s \le t}} (I_t^s - X_{s-})\, \delta_{H_s}(dr)$$

avec $\mathcal{J}_1$ l'ensemble des temps de sauts de X^1.



Serpent de Lévy (Duquesne, Le Gall, 2002)

On construit un processus $(\rho_t, W_t)_{t\geq 0}$ avec un processus de Poisson sous-jacent d'intensité α_1, tel que :

- t fixé, Cond. à H_t,
  $(W_t(s))_{s\in[0,H_t]}$ est un processus de Poisson d'intensité α_1
- t et t' fixés, Cond. à H_t et W_t,
  $W_t = W_{t'}$ sur $[0, H_{t,t'}]$ et $W_{t'}$ est un processus de Poisson d'intensité α_1 partant de $W_t(H_{t,t'}-)$.

Marques sur le squelette

m_t^{ske} est la dérivée de W_t

Serpent de Lévy (Duquesne, Le Gall, 2002)

On construit un processus $(\rho_t, W_t)_{t \geq 0}$ avec un processus de Poisson sous-jacent d'intensité α_1, tel que :

- t fixé, Cond. à H_t,
  $(W_t(s))_{s\in[0,H_t]}$ est un processus de Poisson d'intensité α_1
- t et t' fixés, Cond. à H_t et W_t,
  $W_t = W_{t'}$ sur $[0, H_{t,t'}]$ et $W_{t'}$ est un processus de Poisson d'intensité α_1 partant de $W_t(H_{t,t'}-)$.

Marques sur le squelette

$$m_t^{ske} \text{ est la dérivée de } W_t$$

Temps sous les marques : ($m = (m^{nod}, m^{ske})$)

$$A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{m_s=0} ds$$

et son inverse continu à droite :

$$C_t = \inf\{r > 0; A_r > t\}$$

On obtient le processus d'exploration élagué :

$$\tilde{\rho}_t = \rho_{C_t}$$

Théorème (Abraham, Delmas, V., 2008)

Le processus d'exploration élagué $\tilde{\rho}_t$ a la même loi que $\rho^{(0)}$ processus d'exploration d'un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ_0.

Temps sous les marques : ($m = (m^{nod}, m^{ske})$)

$$A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{m_s=0} ds$$

et son inverse continu à droite :

$$C_t = \inf\{r > 0; A_r > t\}$$

On obtient le processus d'exploration élagué :

$$\tilde{\rho}_t = \rho_{C_t}$$

Théorème (Abraham, Delmas, V., 2008)

Le processus d'exploration élagué $\tilde{\rho}_t$ a la même loi que $\rho^{(0)}$ processus d'exploration d'un processus de Lévy d'exposant de Laplace ψ_0.